

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
A.A. 2004-2005



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Alcuni aspetti matematici della teoria algebrica dei campi

Laureando
Ascanio Borga
matricola 690139 (11116634)

Relatore
Prof. Sergio Doplicher

Indice

Introduzione	iii
1 Formulazione algebrica della Meccanica Quantistica	1
1.1 Assiomatica di Segal e prime conseguenze	1
1.2 Simmetrie e teoria di Wigner	15
1.3 Procedure di quantizzazione	30
1.3.1 Quantizzazione canonica	31
1.3.2 Prodotti tensoriali e seconda quantizzazione	33
2 Teoria quantistica locale	49
2.1 Assiomi di Haag-Kastler-Araki	52
2.2 Teoria dei settori di superselezione	59
2.2.1 Settori localizzabili	60
2.2.2 Settori topologici	63
2.3 Teorie di gauge e teorema di ricostruzione	64
3 Implementazione locale di simmetrie e Teorema di Noether quantistico	73
3.1 Proprietà split e costruzione della mappa localizzante	74
3.2 Implementazione locale di simmetrie	77
3.2.1 Simmetrie interne	77
3.2.2 Simmetrie geometriche	78
3.2.3 Aspetti locali delle regole di superselezione	79
3.3 Significato fisico della proprietà split	80
3.4 Algebra locale delle correnti	83
3.5 Convergenza dei generatori locali a quelli globali	85
3.6 Ricostruzione delle correnti conservate	86

Introduzione

“Un esperto è uno che ha commesso tutti gli errori che si possono commettere in un campo molto ristretto” Niels Bohr

L'articolo di Dirac [Dir27] in cui viene data un'equazione del moto per un elettrone in un campo elettromagnetico rappresenta una prima unificazione dei principi della Meccanica Quantistica con quelli della Relatività (Ristretta). Ma la teoria quantistica dei campi ebbe ancora maggiore riscontro sperimentale con la successiva elettrodinamica quantistica (QED) di Feynman, Schwinger, Tomonaga (fine anni 1940), che per la prima volta applicava il metodo di rinormalizzazione per risolvere gli infiniti della teoria.

Tuttavia, le ambiguità matematiche presenti in questa formulazione lasciavano aperte diverse questioni di natura fondazionale, come quella della definizione precisa degli oggetti principali della teoria, cioè i campi stessi. La soluzione di questo problema si è rivelata tutt'altro che semplice, tanto è vero che, nonostante i molti progressi fatti in questa direzione, è stata trovata soltanto in alcuni casi particolari, come il campo libero, e tuttora manca nel caso interagente. A tutt'oggi il modo più efficace per trattare campi interagenti sembra essere il formalismo di scattering.

Un passo fondamentale verso la comprensione matematica dei campi quantistici viene fatto nell'articolo [BR50], scritto nel 1939 ma pubblicato solo dieci anni più tardi, in cui viene stabilito per la prima volta che, a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, un campo quantistico non può avere un significato puntuale, cioè non può assumere un valore preciso in un punto dello spazio-tempo, ma ha significato soltanto in senso distribuzionale.

Seguendo quest'idea, Wightman e Garding negli anni 1950 arrivarono ad una prima formulazione costruttiva dei campi quantistici, che vengono definiti come distribuzioni a valori operatori agenti sullo spazio di Fock ([SW64]). Grazie a quest'ultimo, che è lo spazio di Hilbert di infinite particelle identiche, i campi acquistano un'interpretazione in termini di particelle, come deve essere: dal fotone (1905) in poi tutte le interazioni fondamentali sono interpretate come scambio di particelle bosoniche ([Per00]).

Il contenuto fisico di una teoria di campo alla Wightman è racchiuso nei valori di aspettazione dei campi sul vuoto, coerentemente col fatto che essi rappresentano stati eccitati prodotti dall'azione dei campi sul vuoto stesso.

Parallelamente, in quegli anni si sviluppò un approccio algebrico alla Meccanica Quantistica, che ha come precedente illustre il lavoro fondazionale svolto da von Neumann ([vN32]), e che, se si vuole, può essere visto come una specie di “teoria degli insiemi” della fisica, con stati e osservabili al posto di classi e insiemi. In questo filone, il ruolo

centrale della teoria é svolto (seguendo un'impostazione alla Heisenberg) esclusivamente dagli osservabili e dalle loro C^* -algebre, come illustrato dall'articolo di Segal ([Seg47]): in questo contesto si possono riformulare tutte le definizioni necessarie all'interpretazione standard della teoria, e inoltre, grazie a potenti teoremi di struttura, si ritrova in maniera naturale la Meccanica Classica nel caso di C^* -algebra degli osservabili commutativa.

Parte integrante della formulazione algebrica é la teoria dei settori di superselezione, ovvero i sottospazi coerenti in cui viene suddiviso lo spazio di Hilbert della teoria, all'interno dei quali vale incondizionatamente il principio quantistico di sovrapposizione di stati puri. L'esigenza di questa teoria nacque in seguito all'articolo [WWW52], nel quale fu rilevata per la prima volta la presenza di limitazioni nella validit  incondizionata del principio di sovrapposizione, dovute al fatto che certe relazioni di fase tra determinati stati non sono osservabili.

Il concetto di settore di superselezione é implementato nella formulazione algebrica dalla nozione di classe di equivalenza unitaria di rappresentazioni irriducibili dell'algebra degli osservabili. Tuttavia questa nozione diventa propria solo nel caso della Teoria dei Campi, in cui si possono avere gradi di libert  infiniti. Infatti nel caso della Meccanica Quantistica non relativistica con un numero finito di gradi di libert  il Teorema di Stone-von Neumann stabilisce che esiste una sola classe di equivalenza di rappresentazioni irriducibili dell'algebra generata dalla "quantizzazione canonica" di posizione ed impulso (che costituisce in questo caso l'algebra degli osservabili della teoria), ovvero si ha un solo settore di superselezione.

Il passo successivo fu dunque quello di riformulare la Teoria dei Campi alla Wightman in termini di osservabili, cosa che avvenne nei primi anni 1960 ad opera principalmente di Haag, Kastler, Araki ([HK64]). L'implementazione della Relativit  Ristretta non si riduce all'usuale richiesta di covarianza di Lorentz, ma costituisce un punto fondamentale: gli oggetti fondamentali della teoria non sono semplicemente gli osservabili, ma gli osservabili *locali*, canonicamente associati a regioni finite dello spazio-tempo (per tale ragione questo filone   noto anche con il nome di *teoria quantistica locale*). In pratica viene assegnata una corrispondenza tra particolari regioni limitate \mathcal{O} dello spazio di Minkowski dette *doppi coni* ed algebre di von Neumann $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ di operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert (dette *algebre locali*):

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

in modo da soddisfare un certo numero di richieste di carattere strettamente fisico (isotonia, localit , covarianza, stabilit , dualit  di Haag, ...). Tramite le algebre locali   anche possibile, nei casi usuali, in cui l'insieme dei doppi coni possiede delle "buone" propriet , ricostruire l'algebra "totale" \mathcal{A} degli osservabili del sistema fisico, "localizzata" in tutto lo spazio-tempo \mathbb{R}^4 .

In questo modo gli osservabili locali, assegnati nel settore di vuoto (la rappresentazione identica), costituiscono l'oggetto fondamentale della teoria e determinano l'intera struttura di superselezione: la realizzazione di questo programma costituisce pertanto un'ulteriore radicalizzazione dell'impostazione operativa della Meccanica Quantistica dovuta ad Heisenberg.

I settori di superselezione assumeranno di solito il significato fisico di "cariche", dal momento che uno degli esempi principali di regola di superselezione riguarda l'impossibilit  di sovrapporre stati con diversa carica elettrica.

Per selezionare gli stati fisicamente rilevanti nel contesto della teoria quantistica

locale, si può cercare di esprimere un criterio per isolare certe rappresentazioni irriducibili dell'algebra degli osservabili con buone proprietà di localizzazione. Un tale criterio di selezione è stato fornito da Doplicher, Haag e Roberts in [DHR71], usando soltanto la nozione di osservabili locali: esso esprime in modo puramente algebrico l'assunzione che gli stati di particella non possano essere distinti dal vuoto con misure effettuate nel complemento spacelike di regioni sufficientemente grandi, ma limitate, dello spazio di Minkowski. Nella letteratura fisico-matematica, tale criterio è noto come criterio DHR, e le cariche soddisfacenti questo criterio vengono chiamate *cariche localizzabili*.

Era chiaro, però, che nel caso della carica elettrica, a causa della legge di Gauss esiste la possibilità di “misurare” un valore non nullo per il flusso uscente attraverso una sfera sufficientemente grande del campo elettrico generato da una carica puntiforme (non nulla) contenuta al suo interno: tale criterio di selezione sembra essere dunque una richiesta un po' troppo forte per incorporare la QED. Tuttavia in natura esistono altri esempi di cariche interpretabili come cariche localizzabili, come il numero barionico o la “stranezza” in QCD pura.

Nonostante queste sue limitazioni, il criterio DHR ha consentito di derivare una struttura molto ricca, che è stata studiata da Doplicher, Haag e Roberts in [DHR71],[DHR74]. Si può dare una legge (commutativa) di composizione di settori di superselezione (ovvero di cariche), derivante da una nozione intrinseca di prodotto su stati localizzati (rappresentazioni soddisfacenti il criterio DHR). Questo prodotto ci permette di definire una nozione generale di statistica dei settori di superselezione, che generalizza l'usuale nozione di statistica di particelle identiche. Si può dimostrare che le usuali statistiche di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac possono ritrovarsi come casi particolari di una statistica di para-Bose e para-Fermi, più il caso “patologico” di statistica infinita (che rappresenta in questa pittura la statistica classica di Boltzmann).

Quest'ultimo caso può essere escluso mediante opportune condizioni spettrali: si può vedere allora che per ogni settore esiste un *coniugato*, caratterizzato dal fatto che la composizione settore-settore coniugato fornisce “radiazione pura”, ovvero il settore di vuoto. Si ritrova dunque in questa teoria la simmetria particella-antiparticella dei numeri quantici di superselezione, che è pervasiva in Teoria dei Campi.

Inoltre è stato trovato che, per ragioni di natura topologica, nel caso di uno spazio-tempo di dimensione $2=1+1$ la statistica di cariche localizzabili non è più ristretta all'alternativa para-Bose e para-Fermi (il che deriva dal fatto che la simmetria di scambio di n cariche identiche è descritta in termini di rappresentazioni unitarie del gruppo delle permutazioni $\mathbb{P}(n)$), ma è governata più in generale da rappresentazioni del gruppo delle trecce, che “degenera” nell'usuale gruppo delle permutazioni nel caso di spazi-tempi di dimensione superiore.

Infine, sotto naturali ipotesi di covarianza relativistica delle osservabili nel settore di vuoto, si è rivelato possibile dimostrare sulla base di principi primi il noto Teorema di Pauli sulla connessione spin-statistica, e persino la teoria della diffusione ha trovato una sua formulazione algebrica.

In un secondo tempo, si è rivelato possibile riformulare la teoria per un altro tipo di cariche, dette *cariche topologiche*, che soddisfano un criterio di selezione un po' indebolito rispetto a quello DHR (tale analisi è dovuta principalmente a Buchholz e Fredenhagen, [BF82]): in questo caso la regione di localizzazione non è più un doppio cono sufficientemente esteso (che è comunque una regione limitata) ma è un *cono spacelike*

(regione illimitata).

Questo criterio produce stati carichi in QED (dove ci si aspetta che valga solo per coni spacelike che puntano in direzioni opportune), ma è limitato a teorie massive, incluse le teorie di gauge non abeliane. In quest'ultimo caso il cono spacelike può essere visto come la regione di localizzazione di una stringa di flusso che unisce due cariche di gauge opposte una volta che un membro di una coppia carica-anticarica viene spostato all'infinito spacelike per dare vita ad uno stato carico.

Anche nel caso di cariche topologiche è possibile dare (in maniera un pò differente) una nozione di composizione di cariche e sviluppare una teoria dei settori di superselezione del tutto analoga a quella per cariche localizzabili, e molti dei risultati validi per queste ultime, come la classificazione delle statistiche (con la differenza che già nel caso di uno spazio-tempo di dimensione $3=2+1$ la statistica è descritta dal gruppo delle trecce), o l'esistenza dei coniugati, continuano ad essere validi.

E' stato visto ([BF82]) che cariche topologiche compaiono effettivamente in teorie massive (dotate di "mass gap"), ed inoltre è stato dimostrato, supponendo l'esistenza di antiparticelle ([DHR74]), che la statistica di particelle massive è necessariamente finita. Resta tuttavia aperta la questione sulla possibilità di effettuare l'analisi delle statistiche in teorie con particelle di massa zero, a causa del cosiddetto "problema dell'infrarosso". E' stato anche visto ([BDRL92]) che quest'ultima situazione sembra corrispondere a certi particolari fenomeni, come la presenza di simmetrie spontaneamente rotte, e dunque alla violazione della dualità di Haag.

Prima ancora che gran parte della teoria dei settori di superselezione venisse sviluppata, gli stessi autori avevano già riformulato la teoria quantistica locale in modo gauge-invariante ([DHR69a],[DHR69b]), ovvero assegnando invece di una rete $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ di algebre di osservabili locali, una rete $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{O})$ di *algebre di campo locali*, ed un gruppo compatto G (detto *gruppo di gauge del 1° ordine*) in modo da ritrovare le algebre di osservabili come punti fissi delle algebre di campo sotto l'azione del gruppo di gauge G .

In quest'ottica gli elementi delle algebre di campo assumono il significato di operatori di campo anche inosservabili, dunque non necessariamente locali (nel senso che non necessariamente commutano a distanze spacelike). In effetti tali operatori soddisfano (a distanze spacelike) delle opportune relazioni di commutazione/anticommutazione, in modo da includere ad esempio anche il caso di campi fermionici. Si noti tuttavia che la richiesta di anticommutatività spacelike non ha, all'interno della teoria quantistica locale, una piena giustificazione fisica, ma è completamente *ad hoc*.

La possibilità di arrivare ad una tale formulazione gauge-invariante a partire unicamente dalla struttura di superselezione (ovvero dagli osservabili locali) era stata dimostrata già in [DHR69b], ma unicamente nel caso in cui i settori di superselezione siano tutti dati da *automorfismi localizzati* dell'algebra degli osservabili \mathcal{A} (vedi Cap.2.2): in questo caso è possibile costruire una rete di campo contenente \mathcal{A} come sottorete di punti fissi sotto l'azione di un gruppo di gauge *abeliano*, il cui duale di Pontrjagin è in corrispondenza 1-1 con i settori.

Che ciò fosse possibile anche nel caso generale è stato a lungo creduto vero, ma è stato effettivamente dimostrato soltanto venti anni più tardi ([DR90]), facendo uso di una teoria matematica nuova, nota con il nome di teoria astratta della dualità per gruppi compatti (ispirata alla classica teoria della dualità di Tannaka-Krein), che gli stessi autori hanno esposto in [DR89a],[DR89b]. In questa teoria l'esistenza di settori coniugati è legata

alla compattezza di G , e la simmetria di permutazione (nel caso di statistiche date dal gruppo delle permutazioni ordinario) è collegata alla struttura gruppale: la presenza di parastatistiche si manifesta se e solo se il gruppo G è non-abeliano.

Da un punto di vista più fisico, il risultato principale della teoria è un poderoso teorema di ricostruzione che, a partire dall'assegnazione delle algebre locali di osservabili, permette di ricostruire (mediante la costruzione di una C^* -algebra “*crossed product*”, nonché di tecniche provenienti dalla teoria delle categorie) le algebre di campo ed il gruppo di gauge che ha come elementi invarianti le algebre di osservabili date.

In questo modo nella teoria locale il principio di invarianza di gauge è completamente dimostrato, e non costituisce più un'assunzione teorica. Inoltre, ancora una volta, l'oggetto principale della teoria è costituito unicamente dagli osservabili locali, come postulato dalla teoria quantistica locale: la struttura delle algebre di campo è completamente determinata dall'algebra quasi-locale \mathcal{A} , dunque tutte le proprietà delle grandezze inosservabili di cui è necessaria l'introduzione nell'approccio tradizionale alla Teoria dei Campi sono deducibili a partire dai soli osservabili locali. Infine, tale risultato è valido sia nel caso di cariche localizzabili che in quello di cariche topologiche, con le opportune modifiche.

Il quadro teorico determinato dal teorema di ricostruzione è il seguente. Una volta assegnata una rete locale $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ di algebre di osservabili agenti sul settore di vuoto, si può dimostrare che, sotto opportune ipotesi (dualità di Haag e proprietà B), esistono un gruppo compatto G e un'unica (a meno di una opportuna equivalenza unitaria) rete locale *completa* (nel senso che contiene tutti i settori di superselezione della teoria) $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{O})$ di algebre di von Neumann, dette *algebre di campo locali*, che agiscono su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , in modo tale che:

(i) la C^* -algebra \mathcal{F} generata dalle $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ (detta *algebra di campo quasi-locale*) è irriducibile

(ii) esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua U del rivestimento universale del gruppo di Poincarè $\tilde{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^4 \ltimes SL(2, \mathbb{C})$ su \mathcal{H} tale che:

$$U(L)\mathcal{F}(\mathcal{O})U(L)^{-1} = \mathcal{F}(L\mathcal{O}) \quad \forall L \in \tilde{\mathcal{P}}$$

Lo spettro del generatore delle traslazioni temporali è positivo. Inoltre esiste un vettore Ω di norma 1, unico a meno di un fattore di fase (detto *vettore di vuoto*) tale che:

$$U(L)\Omega = \Omega \quad \forall L \in \tilde{\mathcal{P}}$$

(iii) esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua V del gruppo di gauge G tale che:

$$V(g)\mathcal{F}(\mathcal{O})V(g)^{-1} = \mathcal{F}(\mathcal{O}) \quad \forall g \in G$$

Inoltre gli operatori $V(g)$ commutano con gli $U(L)$, e lasciano il vuoto invariato.

(iv) le algebre di campo locali soddisfano le relazioni di commutazione/anticommutazione normali

In altre parole esiste un elemento k nel centro del gruppo G , con $k^2 = e$ (identità di G), che genera una rappresentazione di \mathbb{Z}_2 . Ogni elemento $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ si esprime quindi come somma di un elemento pari (la sua *parte di Bose*) e di uno dispari (la sua *parte di Fermi*) rispetto all'azione di \mathbb{Z}_2 , entrambi appartenenti ad $\mathcal{F}(\mathcal{O})$. Infine se $F_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_1)$ ed $F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$, con \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 spazialmente separati, gli operatori F_1 ed F_2 anticommutano nel caso siano entrambi dispari e commutano in tutti gli altri casi.

(v) ogni algebra degli osservabili locali $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ è costituita dagli elementi gauge-invarianti di $\mathcal{F}(\mathcal{O})$, ovvero:

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}(\mathcal{O}) \cap U(G)'$$

La restrizione dell'algebra quasi-locale \mathcal{A} (generata dalle $\mathcal{A}(\mathcal{O})$) al sottospazio $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ dei vettori gauge-invarianti (settore di vuoto) è irriducibile.

(vi) l'eventuale presenza di settori con parastatistica si manifesta nella non-commutatività del gruppo di gauge G : l'ordine di tali parastatistiche coincide con la dimensione delle rappresentazioni irriducibili di G

Tutti i risultati esposti finora vanno in direzione della costruzione di una teoria quantistica alla Heisenberg in cui gli oggetti fondamentali sono gli osservabili locali. Tuttavia si potrebbe ancora obiettare che la costruzione effettiva della struttura di superselezione poggia sulla conoscenza della C^* -algebra quasi-locale, e poiché quest'ultima nella teoria locale non è assegnata a priori, ma è ritrovata come limite induttivo C^* della rete di algebre locali quando la regione di localizzazione tende a tutto lo spazio, la sua ricostruzione richiede la possibilità di effettuare misurazioni a distanze arbitrariamente grandi. In altre parole in questo modo non è possibile effettuare una determinazione *locale* delle regole di superselezione, per cui le relative cariche associate hanno ancora un significato globale. Inoltre molte quantità introdotte nella teoria, come gli operatori $U(L)$ e $V(g)$, sono ancora di natura globale e pertanto i loro generatori sono associati a grandezze quali l'“energia totale dell'universo”, o la “carica totale dell'universo”.

Il problema della possibilità di una determinazione locale della struttura di superselezione riveste dunque una particolare importanza in quanto è collegato agli aspetti operazionali della teoria: solo cariche locali sono effettivamente misurabili in laboratorio e la loro esistenza è condizione perché sia determinabile sperimentalmente la struttura di superselezione stessa.

Questo problema è stato affrontato e risolto in [D82],[DL83], ed ha portato ad una discussione sulla possibilità di fornire un Teorema di Noether quantistico all'interno del formalismo algebrico. In questi lavori viene presentata una procedura “canonica” per la costruzione di operatori unitari localizzati in regioni limitate dello spazio-tempo, che implementano localmente le simmetrie di gauge. Questa implementazione locale si basa essenzialmente su una proprietà del net di algebre di campo, che è chiamata *proprietà split* (vedi Cap.3.1). Poco dopo la costruzione fu estesa anche a simmetrie spazio-temporali e a supersimmetrie ([BDL86]). Inoltre, poiché questa procedura non si basa su un formalismo lagrangiano ma solo sulla struttura algebrica degli osservabili, resta applicabile anche nel caso di simmetrie discrete.

Tramite l'implementazione locale, è possibile dunque ritrovare l'intera struttura di superselezione della teoria a partire da osservabili localizzati in regioni spazio-temporali limitate, a patto di conoscere la “corretta” hamiltoniana locale, e facendo l'ipotesi di *additività* per il net (vedi Cap.3.2.3).

Inoltre, nel caso di simmetrie continue, l'implementazione locale permette di determinare i generatori locali delle simmetrie: tali generatori, in presenza di correnti di Noether, possono essere ottenuti integrando le densità di corrente (opportunamente regolarizzate) su volumi finiti di spazio, pertanto questa costruzione può essere interpretata come una versione debole del Teorema di Noether.

Questi generatori forniscono un'algebra locale delle correnti (vedi Cap.3.4), che va confrontata con l'analoga *ipotesi dell'algebra delle correnti* formulata in termini di campi

di Wightman: quest'ultima prevede che ad ogni elemento u dell'algebra di Lie del gruppo di gauge G sia associato un campo vettoriale j_u^μ che sia anche una corrente conservata, la cui componente tempo j_u^0 sia a sua volta una densità per il generatore del sottogruppo a un parametro di G associato a u . Inoltre si suppone che tale corrente soddisfi delle opportune relazioni di commutazione a tempo zero, nelle quali possono comparire i cosiddetti *termini di Schwinger*.

La formulazione tradizionale dell'ipotesi dell'algebra delle correnti presenta tuttavia alcune difficoltà: è noto che in genere le correnti valutate in $t = 0$ non definiscono distribuzioni a valori operatori, ma soltanto forme bilineari, per le quali l'espressione delle relazioni di commutazione a tempo zero non ha un senso preciso. Si possono comunque ottenere operatori essenzialmente autoaggiunti definendo dei generatori "globali" come regolarizzazione nello spazio e nel tempo delle correnti a tempo zero, ma questo renderebbe impossibile soddisfare la seconda proprietà dell'algebra locale delle correnti: pertanto la possibilità di realizzare esattamente quest'ultima sembra essere legata alla possibilità di perturbare i generatori globali così definiti con opportuni operatori appartenenti al commutante relativo associato alla terna split.

Nondimeno si può dimostrare che sotto opportune ipotesi i generatori locali convergono a quelli globali quando le regioni di localizzazione tendono a tutto lo spazio (vedi Cap.3.5).

Viceversa, si può tentare di effettuare un opportuno limite di scala dei generatori canonici (facendo tendere le regioni di localizzazione ad un punto) per ricavare delle "densità" per tali generatori, ovvero delle correnti di Wightman conservate soddisfacenti le relazioni di commutazione a tempo zero (vedi Cap.3.6). Tramite le componenti tempo di queste correnti sarebbe possibile risalire alle relative cariche di superselezione locali e globali: la soluzione di questo problema fornirebbe pertanto la prova di un Teorema di Noether quantistico completo.

Una soluzione soddisfacente di questo secondo problema è nota per ora soltanto in alcuni casi particolari ([Carp98]). I risultati ottenuti finora sono validi soltanto in teorie libere *invarianti per dilatazioni*: l'esistenza di un operatore unitario che implementi le dilatazioni semplifica la definizione del suddetto limite e permette di concentrare l'attenzione sulla sua convergenza.

Questa tesi consiste in un'esposizione di quanto riassunto finora, ed è suddivisa in tre capitoli, nel modo seguente.

Nel capitolo 1 sono trattati alcuni argomenti generali circa la formulazione algebrica della Meccanica Quantistica e della Teoria dei Campi. La prima sezione, di natura spiccatamente fondazionale, è dedicata all'assiomatica di Segal, ai teoremi di struttura per le C^* -algebre, e ad una discussione del principio di sovrapposizione quantistica e della relativa definizione matematica della struttura di superselezione. La sezione termina con l'enunciato delle cinque condizioni equivalenti che caratterizzano le teorie classiche o le teorie quantistiche. La seconda sezione è dedicata alla nozione di simmetria, dapprima nel caso delle simmetrie geometriche, per poi passare alle simmetrie sugli osservabili, fino all'enunciato del Teorema di Bargmann-Wigner. La sezione termina con una discussione della teoria di Wigner della simmetria, che rappresenta in quest'ottica il caso particolare in cui il gruppo delle simmetrie è dato dal gruppo di Poincaré \mathcal{P} , ma che storicamente è stata la prima teoria a dare origine a tutto il filone. Il punto culminante di questa teoria (che ci è sembrato opportuno riportare) è l'identificazione dei

sistemi elementari della teoria quantistica relativistica in termini puramente cinematici, ovvero attraverso la classificazione delle rappresentazioni unitarie irriducibili (dunque non ulteriormente decomponibili), a energia positiva, del gruppo $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, con i corrispondenti sottospazi invarianti che vengono interpretati come gli spazi di Hilbert per tutte le più piccole “unità relativistiche” presenti nella teoria quantistica. Nella terza sezione vengono presentate le principali procedure di quantizzazione: dapprima la “quantizzazione canonica” non relativistica per sistemi con un numero finito di gradi di libertà (compreso l’enunciato del Teorema di unicità di Stone-von Neumann), poi, una volta introdotta una nozione di prodotto tensoriale (in particolare infinito) di spazi di Hilbert, viene discussa la procedura di seconda quantizzazione, e la costruzione dello spazio di Fock per infinite particelle identiche. In questa sezione sono discussi anche i campi di Segal, gli operatori di creazione/distruzione e le relative regole canoniche di commutazione (CCR), la versione bosonica/fermionica dello spazio di Fock (comprese, nel secondo caso, le regole canoniche di anticommutazione, o CAR) ed, infine, la rappresentazione “numero di particelle” e l’enunciato del Teorema di Garding-Wightman.

Il capitolo 2 é dedicato, dopo una breve discussione sui campi di Wightman e sul modello del campo libero, ad una presentazione della teoria quantistica locale nella concezione di Haag-Kastler e Araki. Nella prima sezione, dopo avere introdotto l’usuale assiomatica, vengono enunciati alcuni risultati generali come il Teorema di Reeh-Schlieder e la proprietà B di Borchers. Nella seconda sezione viene discussa la teoria dei settori di superselezione, in particolare la definizione delle statistiche, e l’esistenza di coniugati, sia nel caso di cariche localizzabili che in quello di cariche topologiche. Infine, nella terza sezione viene presentata la riformulazione gauge-invariante della teoria locale e, dopo una discussione introduttiva, viene enunciato il Teorema di ricostruzione dei campi di Doplicher-Roberts (di nuovo, sia nel caso di cariche localizzabili che in quello di cariche topologiche).

Nel terzo ed ultimo capitolo viene discussa la questione della dimostrazione di un Teorema di Noether quantistico all’interno del presente formalismo. Nella prima sezione si vede come la proprietà split consenta la definizione di uno stato prodotto e di un’opportuna mappa localizzante. Nella seconda sezione quest’ultima viene applicata nell’implementazione locale di simmetrie di gauge e geometriche, nonché della struttura di superselezione stessa. Nella terza sezione vengono discusse alcune condizioni per la validità della proprietà split, come la *condizione di nuclearità*, o un risultato sulla possibilità di preparazione locale degli stati. Infine, nelle rimanenti sezioni, vengono discusse la costruzione di un’algebra locale delle correnti nel caso di simmetrie continue, un risultato di convergenza dei generatori locali a quelli globali, e la questione della ricostruzione delle correnti conservate a partire dai generatori locali delle simmetrie.

Per i risultati di carattere generale introdotti senza dimostrazione, si possono consultare diversi testi indicati nella bibliografia, come ad esempio [Ara99], [BR79], [Car94], [DL7475], [Haag96], [Ped98], [RS74], [RS75].

Ringraziamenti

Il lavoro di redazione di questa tesi sarebbe stato molto piú difficoltoso, se non impossibile, senza l'aiuto delle seguenti persone:

-Luca Tomassini, Gerardo Morsella, Dario Salvitti, Carlo Pandiscia, Giuseppe Ruzzi: per le numerose e fruttuose discussioni sui piú svariati argomenti, spesso risolutive nella realizzazione di questo lavoro

-Paolo Caressa: per il suo improbo lavoro di rielaborazione delle note di Meccanica Quantistica, che piú volte mi é servito da guida, molto piú che la mia mole di appunti disordinati, nella quale io stesso faccio fatica ad orientarmi

-Francesco Esposito: per gli aiuti occasionali con la teoria delle rappresentazioni

-Lorenzo Carvelli, Cristiano Padrin: per aver significativamente ridotto il mio fastidio per il linguaggio \LaTeX (ma non abbastanza da indurmi a correggere tutti gli accenti...)

-Andrea Confuorto: per i non meno importanti aiuti "software"

Infine, un ultimo sentito ringraziamento va naturalmente al prof. Sergio Doplicher, senza il quale questo lavoro letteralmente non esisterebbe.

Questa tesi é dedicata a mio padre Francesco M. Borga (1939-2005).

Capitolo 1

Formulazione algebrica della Meccanica Quantistica

Secondo la terminologia usuale, dato un sistema fisico qualsiasi, un suo *osservabile* indica una proprietà del sistema che può essere misurata, mentre uno *stato* indica una prescrizione per la preparazione del sistema stesso.

Una delle caratteristiche principali della teoria quantistica è che i sistemi fisici non vengono definiti mediante una descrizione di tipo geometrico, ma, seguendo Heisenberg, ne viene data una definizione operativa astratta in termini delle sue proprietà osservabili e dei suoi stati: un sistema fisico è descritto quando è specificato l'insieme di tutti i suoi osservabili, con la sua struttura algebrica.

Usando la nozione di C^* -algebra è possibile dare una formulazione astratta, estremamente elegante, della Meccanica, presentando la teoria quantistica come un formalismo generale all'interno della quale la teoria classica si ritrova come caso particolare in cui la C^* -algebra degli osservabili è commutativa.

Il primo esempio di C^* -algebra non banale che si incontra è l'insieme degli operatori lineari limitati su uno spazio di Hilbert finito o infinito-dimensionale: tutti oggetti che compaiono abitualmente nella formulazione tradizionale della Meccanica Quantistica. Inoltre, ogni *-sottoalgebra chiusa in norma di tale algebra è una C^* -algebra e, come vedremo, ogni C^* -algebra astratta può essere realizzata in tale modo.

Nelle applicazioni spesso compaiono anche operatori lineari non limitati, ovvero non continui (ad esempio gli operatori di derivazione), il cui dominio di definizione è usualmente non tutto lo spazio di Hilbert ma un suo sottospazio denso. In ogni modo ci restringeremo per quanto possibile al caso di operatori limitati.

Diamo ora un breve riepilogo dell'assiomatica proposta da Segal, cercando di motivare brevemente la scelta di tali assiomi.

1.1 Assiomatica di Segal e prime conseguenze

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra.

Ricordiamo che la **parte positiva** di \mathcal{A} è definita come $\mathcal{A}_+ := \{B^*B : B \in \mathcal{A}\}$ ed i suoi elementi si dicono **positivi**; il **cono duale** di \mathcal{A} è l'insieme $\mathcal{A}_+^* := \{f \in \mathcal{A}^* : \forall A \in \mathcal{A}_+, f(A) \geq 0\}$, e lo **spazio degli stati** di \mathcal{A} è dato da $\mathcal{S}(\mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{A}_+^* : \|f\| = 1\}$.

Sulla scia del lavoro fondazionale sulla Meccanica Quantistica iniziato da von Neumann ed esposto nel seminale [vN32], Segal propone in [Seg47] il seguente sistema di assiomi per le teorie quantistiche:

(1) Gli osservabili di un sistema fisico sono la parte autoaggiunta di una generica C^* -algebra \mathcal{A} :

$$\mathcal{O} \equiv \mathcal{A}_{aa}$$

Se le proprietà algebriche degli osservabili sono la caratteristica distintiva di un sistema fisico, abbiamo bisogno di una definizione di stato che non usi la realizzazione degli osservabili come operatori sullo spazio di Hilbert.

(2) Gli stati di un sistema fisico sono l'insieme dei funzionali lineari positivi e normalizzati su \mathcal{A} :

$$\Sigma \equiv \mathcal{S}(\mathcal{A})$$

In fisica quantistica, uno stato assegna ad un osservabile non un singolo valore, ma, in generale, una distribuzione di probabilità di valori misurati.

(3) La valutazione di uno stato $\omega \in \Sigma$ su un osservabile $A \in \mathcal{O}$ ha il senso del valore di aspettazione (valor medio) di A in ω :

$$\omega(A) =: \text{Exp}(\omega, A) \equiv \langle A \rangle_\omega$$

Il fatto di avere una descrizione in termini di osservabili (in cui gli stati sono definiti da valori medi) non è più, come nella Meccanica Classica, un rimedio ad una conoscenza incompleta del sistema, ma una caratteristica strutturale nuova della Meccanica Quantistica che deriva dalla non commutatività di \mathcal{A} , ovvero dal principio di indeterminazione di Heisenberg. E' solo nel caso commutativo che i valori medi degenerano in valori certi, per tutti gli stati puri, esprimendo il comportamento classico.

Seguendo la definizione operativa di stati ed osservabili, dovuta originariamente a von Neumann, è facile vedere che il funzionale d'aspettazione $\omega \mapsto \omega(A)$ e' convesso, dunque gli stati formano un insieme convesso. Questo fatto si ritrova nel formalismo algebrico, perché sussiste la seguente:

Proposizione 1.1.1 $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ è un insieme convesso, *-debolmente chiuso e compatto.

Poiché lo spazio degli stati è un compatto convesso (in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso \mathcal{A}^*), per il Teorema di Krejn-Milman ha senso considerare l'insieme dei suoi punti estremali, che è non vuoto, e si ha:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \overline{\text{Conv}(\text{Extr}(\mathcal{S}(\mathcal{A})))}$$

I punti estremali di $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ sono detti **stati puri**, e si denotano con $\mathcal{P}(\mathcal{A}) := \text{Extr}(\mathcal{S}(\mathcal{A}))$. Gli stati puri, come vedremo, rappresentano stati del sistema fisico con "preparazione ottimale", ovvero conoscenza migliore possibile. Uno stato che non è puro sarà detto un **miscuglio statistico**.

Vediamo ora l'implementazione matematica di un altro importante concetto che viene dalla fisica. Definiamo lo **spettro fisico** di $A \in \mathcal{O}$ come l'insieme:

$$\sigma_{ph}(A) := \{\text{possibili risultati delle misure di } A\} \subseteq \mathbb{R}$$

Faremo le seguenti ipotesi operative su $\sigma_{ph}(A)$:

- $\sigma_{ph}(A)$ limitato in \mathbb{R}

- $\sigma_{ph}(A)$ chiuso in \mathbb{R}

La spiegazione della seconda ipotesi è che fisicamente conviene considerare, per via degli inevitabili errori sperimentali, invece di valori λ , degli intervallini $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ centrati

in λ , dei quali successivamente andiamo a fare l'intersezione. Dunque $\sigma_{ph}(A)$ dovrà essere un insieme compatto.

Ci aspettiamo che valga una formula di calcolo funzionale fenomenologico del tipo:

$$\sigma_{ph}(f(A)) = f(\sigma_{ph}(A))$$

In altre parole vogliamo poter considerare funzioni di osservabili $f(A), A \in \mathcal{O}$, e ciò sarà equivalente a considerare funzioni $f : \sigma_{ph}(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Una richiesta ragionevole è che f sia uniformemente continua, in modo che $|\lambda - \lambda'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\lambda) - f(\lambda')| < \varepsilon$.

La richiesta di continuità uniforme garantisce che piccoli errori nella misura di A non possano essere amplificati da f diventando errori grandi su $f(A)$. Senza questa condizione l'osservabile $f(A)$ perderebbe di significato fisico [Tol99a].

Poiché $\sigma_{ph}(A)$ è compatto, per il Teorema di Heine-Cantor basterà richiedere che f sia continua.

Introduciamo ora un'importante definizione. Lo **scarto quadratico medio** di A in ω è:

$$(\Delta_\omega A)^2 := \omega((A - \omega(A) \cdot I)^2)$$

dove l'osservabile I corrisponde a non fare alcuna misurazione. In altre parole lo scarto quadratico medio rappresenta l'errore (quadratico) che si fa quando si sostituisce ad A il suo valor medio in ω . Dunque:

$$\sigma_{ph}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \omega \text{ che assume con certezza il valore } \lambda \text{ su } A\} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \omega(A) = \lambda, (\Delta_\omega A)^2 = 0\}$$

Usando uno strumento che ancora non è stato introdotto, la rappresentazione GNS π_ω associata a ω , si può vedere che $(\Delta_\omega A)^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_\omega$, il vettore GNS di ω , è un autovettore di $\pi_\omega(A)$. In conclusione si ha che $\sigma_{ph}(A) = \sigma(A)$, e conseguentemente il calcolo di funzioni sullo spettro fisico coincide col calcolo funzionale.

Ricordiamo che A subisce una **fluttuazione quantistica** in $\omega \Leftrightarrow (\Delta_\omega A) \neq 0$.

Abbiamo richiesto (assioma 1 di Segal) che gli osservabili di un sistema fisico formino la parte autoaggiunta di una certa C^* -algebra. In realtà \mathcal{O} può essere dotato di una struttura di **algebra di Jordan**, introducendo il prodotto:

$$A \circ B := \frac{1}{2}(A + B)^2 - A^2 - B^2 = \frac{1}{2}(AB + BA)$$

Per approfondimenti sulle algebre di Jordan si può vedere [AS03]. Si possono considerare **osservabili compatibili**, ovvero osservabili per cui è possibile effettuare misurazioni simultanee senza reciproca influenza: in tal caso $A+B$ e AB, BA hanno come misurazioni la somma e il prodotto delle misurazioni di A e B rispettivamente.

In generale è possibile verificare (come conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) che ogni coppia di osservabili rispetta le seguenti **relazioni di Heisenberg**:

$$(\Delta_\omega A)(\Delta_\omega B) \geq \frac{1}{2}|\omega(\frac{AB-BA}{i})|$$

Una conseguenza immediata è la seguente:

Lemma 1.1.2 A, B sono compatibili $\Leftrightarrow A, B$ commutano, ovvero $[A, B] := AB - BA = 0$

Spesso è conveniente, invece che lavorare direttamente sulla C^* -algebra, considerarne una rappresentazione in qualche algebra di operatori: in questo modo è possibile ritrovare il collegamento tra la formulazione algebrica e quella tradizionale basata sullo spazio di Hilbert.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra con identità I (questa ipotesi non é fisicamente restrittiva, e come vedremo non lo é neanche matematicamente), e π una sua rappresentazione (non degenera, quindi $\pi(I) = I$) di \mathcal{A} su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} :

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Sia $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$. Definiamo $\omega(A) := \omega_\xi \circ \pi(A) \equiv (\xi, \pi(A)\xi)$, che é un funzionale lineare (lo é π) e positivo, infatti:

$$\omega(A^*A) = (\xi, \pi(A)^*\pi(A)\xi) = (\pi(A)\xi, \pi(A)\xi) = \|\pi(A)\xi\|^2 \geq 0$$

Inoltre, essendo $\|\xi\| = 1$ e $\pi(I) = I$, si ha $\omega(I) = \|\xi\|^2 = 1$. Dunque $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, ed $\omega(A)$ sará il **valore di aspettazione** di A in ω . Stati di questo tipo si dicono **stati vettoriali**, perché sono indotti in $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ da vettori in \mathcal{H} .

Un'altra classe di stati associati alla rappresentazione π é quella degli **stati matrici densitá**, cioè stati ω tali che:

$$\omega(A) := \text{tr}(\rho\pi(A))$$

dove ρ é l'**operatore densitá** (o **matrice densitá**), che é di classe traccia in \mathcal{H} , positivo e tale che $\text{tr}\rho = 1$.

In altre parole connessa ad una rappresentazione π c'è una famiglia di stati:

$$\mathcal{S}_\pi(\mathcal{A}) := \{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : \exists \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \rho \geq 0, \text{tr}\rho = 1, \text{ e } \omega(A) = \text{tr}(\rho\pi(A))\}$$

$\mathcal{S}_\pi(\mathcal{A})$ é detto un **folium**, cioè un insieme \mathcal{S} di stati di \mathcal{A} con la proprietà:

$$\sum_i \omega(A_i^*A_i) = 1 \implies A \longmapsto \sum_i \omega(A_i^*AA_i) \in \mathcal{S}, \text{ con } \omega \in \mathcal{S}, \text{ e } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{S}_\pi(\mathcal{A})$ é un sottoinsieme chiuso in norma di $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Due rappresentazioni π_1, π_2 sono **quasi-equivalenti** se e solo se $\mathcal{S}_{\pi_1}(\mathcal{A}) = \mathcal{S}_{\pi_2}(\mathcal{A})$.

Allo scopo di fare un esempio concreto, ricordiamo brevemente la notazione originale introdotta da Dirac in [Dir58]. Il simbolo $|\psi\rangle$ é detto un *ket* e rappresenta semplicemente un vettore $\psi \in \mathcal{H}$, mentre $\langle\phi|$ é detto *bra* e rappresenta l'elemento del duale \mathcal{H}^* corrispondente, tramite il Teorema di Riesz, al prodotto scalare a sinistra per il vettore ϕ . In altre parole si può scrivere:

$$\langle\phi|\psi\rangle = (\phi, \psi) \in \mathbb{C}$$

dove per convenzione nel primo simbolo la barretta verticale $|$ é scritta soltanto una volta. La scrittura:

$$|\phi\rangle\langle\phi|$$

ha invece il preciso significato di proiezione ortogonale sul sottospazio generato da ϕ .

Più in generale il simbolo:

$$|\psi\rangle\langle\phi|$$

è ancora un operatore di rango 1, che può essere interpretato geometricamente come una proiezione *non* ortogonale sul sottospazio generato da ψ .

Veniamo dunque al nostro esempio di matrice densitá; consideriamo la rappresentazione identica, e prendiamo $\omega_i \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, e $\lambda_i \in \mathbb{R}$, con $\lambda_i > 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, allora poiché $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ é convesso:

$$\omega = \sum_i \lambda_i \omega_i \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$$

Se $\omega_i(A) = (\psi_i, A\psi_i)$, allora usando la notazione di Dirac la matrice densitá si scrive in forma diagonale:

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

in modo tale che:

$$\omega(A) = \sum_i \lambda_i \omega_i(A) = \sum_i \lambda_i (\psi_i, A\psi_i) = \text{tr}(\rho A)$$

Ricordiamo che gli operatori tracciabili formano un ideale bilatero di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

T tracciabile, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \implies AT, TA$ tracciabili

dunque ogni matrice densità induce uno stato sull'algebra degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert:

$$\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longmapsto \omega_\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

Gli stati matrici densità in generale rappresentano stati misti (miscugli statistici). Il caso speciale di stati puri si ottiene quando l'operatore densità degenera in una proiezione su un sottospazio 1-dimensionale (ovvero si ha un solo vettore unitario in \mathcal{H}).

Gli stati di un folium, ovvero le matrici densità, possono anche essere usati per caratterizzare la topologia ultradebole, ultraforte, e *-ultraforte di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Le matrici densità dunque descrivono gli stati nelle rappresentazioni. In realtà tutti gli stati si possono ottenere così, tramite il seguente teorema. Il teorema GNS é inoltre di fondamentale importanza in quanto spiega come legare stati e osservabili tramite il valore di aspettazione (v.assioma 3 di Segal) mostrando anche come mediante il concetto di rappresentazione é possibile collegare il formalismo algebrico con quello tradizionale.

Teorema 1.1.3 (GNS) *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra con identità I , e sia dato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Esiste una terna $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ composta da:*

(1) *uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω*

(2) *una rappresentazione $\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ non degenera*

(3) *un vettore $\xi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ di norma 1, $\|\xi_\omega\| = 1$, tale che $\forall A \in \mathcal{A}$:*

$$(\xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega) = \omega(A)$$

e $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega = \mathcal{H}_\omega$, ovvero ξ_ω é ciclico per la rappresentazione π_ω .

Tale terna é unica a meno di equivalenza unitaria.

Ricordiamo che ω é detto uno **stato fedele** se $\omega(A^*A) > 0, \forall A \neq 0$ (il che implica che π_ω é una rappresentazione fedele, cioè con nucleo banale).

Tramite il teorema GNS é possibile dimostrare che ogni C^* -algebra ammette una rappresentazione fedele in un'algebra di operatori.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra, e $A \in \mathcal{A}$. Allora esiste $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che $\omega(A^*A) = \|A\|^2$, quindi applicando GNS otteniamo una famiglia di rappresentazioni $\{\pi_\omega\}_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}$.

La **rappresentazione universale** di \mathcal{A} é definita come:

$$\hat{\pi} := \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \pi_\omega$$

Si noti che $\hat{\pi}$ opera su uno spazio di Hilbert in generale non separabile:

$$\hat{\mathcal{H}} = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{H}_\omega$$

Si può dimostrare che $\hat{\pi}$ é una rappresentazione fedele (e isometrica).

Per C^* -algebre qualsiasi vale il seguente:

Teorema 1.1.4 (Gelfand-Naimark) *Ogni C^* -algebra \mathcal{A} é isometricamente isomorfa ad una C^* -sottoalgebra di operatori lineari limitati su un opportuno spazio di Hilbert.*

Dim.

Basta prendere la rappresentazione universale di \mathcal{A} (che é fedele):

$$\hat{\pi} \equiv \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{H}_\omega) \equiv \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}})$$

e ricordare che gli stati $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ costituiscono una famiglia separante per \mathcal{A} , cioè se considero due diversi elementi dell'algebra esiste almeno uno stato che assume su essi valori diversi. ■

In altre parole questo teorema ci dice che, come abbiamo preannunciato, le algebre di operatori lineari limitati su spazi di Hilbert costituiscono l'esempio piú generale di C^* -algebra.

Vediamo come ora nella formulazione algebrica la Meccanica Classica si ritrovi in maniera naturale del formalismo quantistico in cui la C^* -algebra degli osservabili é commutativa. Se infatti tale C^* -algebra é commutativa, allora vale un Teorema di struttura (sempre dovuto a Gelfand e Naimark) piú particolareggiato:

Teorema 1.1.5 (*Gelfand-Naimark*) *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra commutativa con identitá. Allora esiste $X = \sigma(\mathcal{A})$ spazio topologico compatto di Hausdorff ed uno $*$ -isomorfismo isometrico di \mathcal{A} su $C_{\mathbb{C}}^0(\sigma(\mathcal{A}))$.*

Esplicitamente tale $*$ -isomorfismo é dato dalla **trasformata di Gelfand**, definita come:

$$\begin{aligned} \hat{\cdot}: \mathcal{A} &\longrightarrow C_{\mathbb{C}}^0(\sigma(\mathcal{A})) \\ A &\longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(A)) \end{aligned}$$

In altre parole $\hat{\cdot}$ associa ad A la valutazione in A di un morfismo in $\sigma(\mathcal{A})$:

$$\hat{A}(\varphi) = \varphi(A), \text{ con } \varphi \in \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^*$$

Sappiamo che supporre che la nostra C^* -algebra abbia l'identitá non é fisicamente restrittivo. Tuttavia non lo é neanche matematicamente, infatti ogni C^* -algebra \mathcal{A} si immerge naturalmente in una C^* -algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ (mediante la rappresentazione regolare sinistra). Inoltre \mathcal{A} é commutativa se e solo se lo $\tilde{\mathcal{A}}$. Risulta:

Corollario 1.1.6 *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra commutativa. Allora esiste uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff X tale che $\mathcal{A} \cong C_{0\mathbb{C}}^0(\sigma(\mathcal{A}))$.*

In definitiva se la C^* -algebra degli osservabili é commutativa (con identitá) essa é necessariamente isomorfa all'algebra delle funzioni continue complesse su uno spazio topologico X compatto di Hausdorff: questa é proprio la situazione tipica della Meccanica Classica (nella formulazione hamiltoniana). Infatti in questo caso come X prendiamo un sottoinsieme Ω compatto dello spazio delle fasi (possiamo assumere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ chiuso e limitato, oppure prendere la compattificazione ad un punto di tutto lo spazio delle fasi), e gli osservabili di questa regione sono le q e le p in essa contenute, e tutte le loro funzioni (continue - e dunque uniformemente continue - in modo che abbiano senso fisicamente, come abbiamo giá osservato). Inoltre gli stati sono i funzionali lineari positivi e normalizzati su $C_{\mathbb{C}}^0(\Omega)$, quindi per il Teorema di Riesz-Markov essi sono in corrispondenza 1-1 con le misure regolari su Ω , ovvero si ha:

$$\omega \longleftrightarrow \mu_{\omega}$$

in modo tale che:

$$\omega(f) = \langle f \rangle_{\omega} = \int_{\Omega} f(\omega') d\mu_{\omega'}$$

Il Teorema di Gelfand-Naimark ci dice inoltre che $\Omega = \sigma(\mathcal{A})$.

Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, si dice che ω é uno **stato dominato** da φ e si scrive $\omega \ll \varphi$ se esiste una costante $M \geq 0$ tale che $M\varphi - \omega \geq 0$. L'insieme degli stati dominati da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ si denota C_{φ} . Vale la seguente:

Proposizione 1.1.7 *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra commutativa. Sono equivalenti:*

- (1) $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$
- (2) $\text{supp}\mu_\omega = \{x\}$
- (3) $C_\varphi = \{\omega\}$

Dunque nel caso commutativo gli stati puri sono in corrispondenza 1-1 con le misure di Dirac concentrate in un punto: in questo caso in uno stato puro ogni osservabile assume un valore certo, ovvero non c'è il fenomeno cosiddetto della fluttuazione quantistica.

Vediamo ora, nel caso commutativo, un argomento di *abbondanza di stati*. Sia \mathcal{A} una C^* -algebra commutativa, e $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$. Allora $\varphi(A^*A) = \varphi(A^*)\varphi(A) = |\varphi(A)|^2 \geq 0$ (φ è moltiplicativo per definizione di $\sigma(\mathcal{A})$), cioè φ è uno stato (infatti essendo positivo si ha $\varphi(I) = \|\varphi\| = 1$ — si ricordi che poiché un funzionale continuo $\varphi \in \mathcal{A}^*$ è positivo se e solo se $\varphi(I) = \|\varphi\|$, per cui un elemento $\omega \in \mathcal{A}^*$ è uno stato se e solo se $\omega(I) = \|\omega\| = 1$). Per ogni $A \in \mathcal{A}$ esiste $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tale che $\omega(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2$. Infatti essendo A^*A autoaggiunto, $C^*(A^*A, I)$ è commutativa. Inoltre $\text{spr}(A^*A) = \|A^*A\|$, e $\sigma(C^*(A^*A, I)) \cong \sigma(A^*A)$, dunque esiste uno stato $\varphi \in \mathcal{S}(C^*(A^*A, I))$ tale che $\varphi(A^*A) = \|A^*A\| = \|A\|^2$. Usando un argomento alla Hahn-Banach possiamo estendere φ a ω . Dunque vale $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_1^*$.

Sappiamo dunque che se \mathcal{A} è commutativa allora $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Inoltre, ovviamente, $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$. In realtà si può dimostrare che nel caso commutativo gli stati puri sono tutti e soli quelli moltiplicativi:

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Il seguente risultato di estensione di stati è conseguenza del Teorema di Hahn-Banach:

Teorema 1.1.8 *Siano $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ C^* -algre con la stessa unità I , e $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Allora esiste $\tilde{\omega} \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ tale che $\tilde{\omega}|_{\mathcal{A}} = \omega$.*

Vale anche il seguente risultato più particolareggiato:

Teorema 1.1.9 (Segal) *Siano $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ C^* -algre con la stessa unità I . Allora ogni stato puro di \mathcal{A} si estende ad uno stato puro di \mathcal{B} .*

Dunque se $A \in \mathcal{A}$, esiste uno stato puro ω tale che $\omega(A^*A) = \|A\|^2$, e posso costruire una rappresentazione universale indicizzandola soltanto sugli stati puri di \mathcal{A} :

$$\bigoplus_{\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \pi_\omega$$

Tale rappresentazione prende il nome di **rappresentazione atomica ridotta**, ed è anche un po' più economica della rappresentazione universale (nel senso che lo spazio di Hilbert su cui opera è un "po' più separabile").

Il legame tra stati puri e rappresentazioni GNS è espresso dal seguente risultato, dovuto ancora a Segal:

Teorema 1.1.10 (Segal) *Uno stato ω è puro se e solo se la rappresentazione GNS π_ω è irriducibile.*

Dunque ad esempio nella rappresentazione atomica ridotta le rappresentazioni di cui viene effettuata la somma diretta sono tutte irriducibili.

Ricordiamo che l'insieme degli **operatori di allacciamento** tra due rappresentazioni $\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e $\pi_2 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ é definito come:

$$(\pi_1, \pi_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : \forall A \in \mathcal{A}, T\pi_1(A) = \pi_2(A)T\}$$

Se esiste $U \in (\pi_1, \pi_2)$ operatore unitario, π_1 e π_2 sono dette **unitariamente equivalenti**, e si scrive $\pi_1 \cong \pi_2$. Se $(\pi_1, \pi_2) = 0$, π_1 e π_2 sono dette **disgiunte** e si scrive $\pi_1 \perp \pi_2$. Un risultato fondamentale é il seguente:

Teorema 1.1.11 (*Glimm-Kadison*) *Se $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ sono tali che $\|\omega - \varphi\| < 2$, allora $\pi_\omega \perp \pi_\varphi$*

Se π é una rappresentazione ciclica di \mathcal{A} , allora $\pi \leq \hat{\pi}$. Infatti se ξ é il vettore ciclico, e $\omega(A) := (\xi, \pi(A)\xi)$, per il Teorema GNS si ha $\pi \cong \pi_\omega \leq \hat{\pi}$, e dunque:

Lemma 1.1.12 *Ogni rappresentazione di una C^* -algebra ha una sottorappresentazione ciclica equivalente ad una sottorappresentazione della rappresentazione universale, ovvero:*
 $\forall \pi, \pi \lesssim \hat{\pi}$

Vediamo ora come si implementano nel formalismo algebrico il principio di sovrapposizione, le regole di superselezione e la relativa struttura di superselezione associata. Il **principio di sovrapposizione** é uno dei capisaldi teorici della Meccanica Quantistica nella sua formulazione originaria di Dirac, esposta dallo stesso Dirac in [Dir58]. Essenzialmente consiste nel fatto che la funzione d'onda relativa allo stato di un sistema quantistico puó esprimersi come sovrapposizione (somma) di altre due funzioni d'onda, ovvero delle sue componenti nel suo spazio ambiente (lo spazio di Hilbert). Ció é essenzialmente una conseguenza della linearit  dell'equazione di Schroedinger (la somma di due soluzioni é ancora soluzione). Se ψ_1 e ψ_2 sono le funzioni d'onda di due stati, ogni combinazione lineare:

$$\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$$

  ancora la funzione d'onda di uno stato. Inoltre ricordiamo che le funzioni d'onda sono definite a meno di multipli complessi, ovvero non sono in corrispondenza 1-1 con i vettori ma con i *raggi* nello spazio di Hilbert. Tuttavia, se cambiamo ψ_1 in $e^{i\theta}\psi_1$, con $\theta \in \mathbb{R}$, allora:

$$\psi' = \alpha e^{i\theta}\psi_1 + \beta\psi_2$$

descrive in generale uno stato diverso da ψ . L'osservabilit  del fattore di fase $e^{i\theta}$   la caratteristica distintiva della teoria quantistica: il contenuto fisico della teoria   codificato nella probabilit  di transizione tra stati differenti.

Wick, Wightman e Wigner nell'articolo [WWW52] osservano che non   possibile garantire la validit  incondizionata del principio di sovrapposizione nel formalismo quantistico, ma   necessario introdurre delle limitazioni a causa del fatto che alcuni stati non possono essere sovrapposti in maniera coerente (sostanzialmente   possibile sovrapporre soltanto stati dello stesso tipo). Riportiamo di seguito l'argomento proposto.

Si considera una sovrapposizione dello stato di una particella con spin $\frac{1}{2}$ con quello di una particella di spin 0:

$$\psi = \alpha\psi_{\frac{1}{2}} + \beta\psi_0$$

Una rotazione di 2π cambia il vettore di stato della particella con spin $\frac{1}{2}$ da $\psi_{\frac{1}{2}}$ a $-\psi_{\frac{1}{2}}$ (si ricordi che per motivi fisici una particella con spin $\frac{1}{2}$ “torna uguale” dopo una rotazione di 4π), mentre lascia invariato il vettore di stato della particella con spin 0:

$$\psi' = -\alpha\psi_{\frac{1}{2}} + \beta\psi_0$$

Ma una rotazione di 2π non può avere effetti osservabili, quindi dobbiamo trovare gli stessi valori di aspettazione per ogni osservabile A, cioè per ogni α, β :

$$(\psi, A\psi) = (\psi', A\psi') = |\alpha|^2(\psi_{\frac{1}{2}}, A\psi_{\frac{1}{2}}) + |\beta|^2(\psi_0, A\psi_0) \pm (\bar{\alpha}\beta(\psi_{\frac{1}{2}}, A\psi_0) + \alpha\bar{\beta}(\psi_0, A\psi_{\frac{1}{2}}))$$

Poiché ciò deve valere per entrambi i segni deve essere:

$$(\psi_{\frac{1}{2}}, A\psi_0) = 0$$

cioè gli elementi di matrice di ogni osservabile A tra uno stato a spin $\frac{1}{2}$ e uno stato a spin 0 devono svanire. Dunque sullo stato ψ gli osservabili hanno gli stessi valori di aspettazione che si hanno sulla matrice densità:

$$\rho = |\alpha|^2|\psi_{\frac{1}{2}}\rangle\langle\psi_{\frac{1}{2}}| + |\beta|^2|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$$

L'impossibilità di sovrapporre tali stati coerentemente è detta una **regola di superselezione** (si ricordi che in Meccanica Quantistica le regole di selezione erano delle leggi che proibivano certe transizioni tra i vari livelli energetici degli elettroni atomici). Oltre alla regola di superselezione sugli spin, esistono anche altre regole di superselezione, come ad esempio quella di Bargmann sulla impossibilità (in una teoria quantistica non relativistica, con invarianza galileiana) di sovrapporre stati con diversa massa, o quella relativa a stati con un diverso numero di particelle. Come si vedrà, queste limitazioni risulteranno in una struttura algebricamente molto ricca: in breve lo spazio di Hilbert della teoria viene suddiviso in vari sottospazi, corrispondenti ai cosiddetti **settori di superselezione**, all'interno dei quali il principio di sovrapposizione quantistica vale incondizionatamente. Il significato fisico dei settori di superselezione sarà quello di contenere gli stati relativi a particelle simili, con stessa carica, spin, ecc... In altre parole ad ogni settore corrisponde un diverso valore dei numeri quantici di carica, univalenza, ecc...

Concentriamo l'attenzione sugli stati vettoriali. Per il Teorema GNS ogni stato ω è uno stato vettoriale per qualche vettore ξ_ω della terna GNS. In altre parole, ogni stato è uno stato vettoriale della rappresentazione universale. L'**insieme degli stati vettoriali** della rappresentazione π è:

$$\mathcal{V}_\pi := \{\omega_\xi \circ \pi : \xi \in \mathcal{H}_\pi, \|\xi\| = 1\}$$

In generale, se π_1 e π_2 sono due rappresentazioni qualsiasi, è facile vedere che risulta:

$$\pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2 \iff \mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2} = \emptyset$$

In particolare, se $\pi_1 \cong \pi_2$ allora $\mathcal{V}_{\pi_1} = \mathcal{V}_{\pi_2}$. Il viceversa vale se e solo se π_1 e π_2 sono irriducibili.

Consideriamo dunque due rappresentazioni irriducibili π_1, π_2 . Questo equivale a considerare stati puri, infatti in tal caso $\mathcal{V}_{\pi_1}, \mathcal{V}_{\pi_2} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Si ha inoltre la seguente situazione:

$$\mathcal{V}_{\pi_1} = \mathcal{V}_{\pi_2} \iff \pi_1 \cong \pi_2$$

$$\mathcal{V}_{\pi_1} \cap \mathcal{V}_{\pi_2} = \emptyset \iff \pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2 \implies d(\mathcal{V}_{\pi_1}, \mathcal{V}_{\pi_2}) = 2$$

In particolare l'ultima implicazione é una conseguenza del Teorema di Glimm-Kadison. Le collezioni degli stati vettoriali sono dunque "isole" disgiunte, a distanza 2 (>0 !). Queste collezioni esauriscono $\mathcal{P}(\mathcal{A})$: lo spazio degli stati puri é unione disgiunta delle collezioni degli stati vettoriali di rappresentazioni irriducibili. Inoltre l'insieme di tali collezioni é in corrispondenza 1-1 con le classi di equivalenza unitaria:

$$\{\mathcal{V}_\pi, \pi \text{ irriducibile}\} \longleftrightarrow \{[\pi] : \pi \sim \pi' \Leftrightarrow \pi \cong \pi', \pi \text{ e } \pi' \text{ irriducibili}\}$$

Sono queste classi ad avere il significato fisico di **settori di superselezione**, cioé famiglie di stati puri all'interno delle quali vale il **principio di sovrapposizione** caratteristico delle teorie quantistiche.

Consideriamo ora il caso di una singola collezione di stati vettoriali. Se π é una rappresentazione non degenera della C^* -algebra \mathcal{A} , e $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ sono tali che $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, allora é noto che :

$$\omega_\xi \circ \pi = \omega_\eta \circ \pi \iff \exists T \in \pi(\mathcal{A})' \text{ isometria parziale tale che } \eta = T\xi$$

Se ora π é una rappresentazione irriducibile, allora per il Lemma di Schur $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\cdot I$. In tal caso si ha:

$$\omega_\xi \circ \pi = \omega_\eta \circ \pi \iff \eta = z\xi, \text{ con } z \in \mathbb{C}, |z| = 1$$

poiché le isometrie parziali di \mathbb{C} sono date dai complessi di modulo 1. Osserviamo inoltre che se $\xi \in \mathcal{H}_\pi, \|\xi\| = 1$, la mappa $\xi \in \mathcal{H}_\pi \longmapsto \omega_\xi \circ \pi \in \mathcal{V}_\pi$ non può essere iniettiva, essendo $(\omega_\xi \circ \pi)(A) = (\xi, \pi(A)\xi)$. Lo sarà, se la pensiamo definita sullo **spazio proiettivo associato allo spazio di Hilbert** \mathcal{H}_π , ovvero l'insieme:

$$\mathbb{P}\mathcal{H}_\pi := \frac{\mathcal{H}_\pi \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} = \frac{\{\xi \in \mathcal{H}_\pi, \|\xi\|=1\}}{\mathbb{T}} = \{\text{sottospazi 1-dimensionali di } \mathcal{H}_\pi\}$$

Dunque se π é irriducibile abbiamo la corrispondenza biunivoca:

$$\xi \in \mathbb{P}\mathcal{H}_\pi \iff \omega_\xi \circ \pi \in \mathcal{V}_\pi \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

In altre parole una singola collezione di stati vettoriali associati ad una rappresentazione irriducibile é in corrispondenza 1-1 con il relativo spazio di Hilbert proiettivo. Lo spazio di Hilbert proiettivo $\mathbb{P}\mathcal{H}_\pi$ rappresenta il legame con il formalismo tradizionale: la sovrapposizione di stati puri in \mathcal{V}_π sarà "regolata" dalla sovrapposizione di vettori in $\mathbb{P}\mathcal{H}_\pi$, che gioca il ruolo del vecchio spazio di Hilbert delle funzioni d'onda.

Esaminiamo ancora il fenomeno della sovrapposizione quantistica. Osserviamo innanzitutto che nel caso in cui \mathcal{A} é una C^* -algebra commutativa e π é una sua rappresentazione irriducibile allora necessariamente $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}$. Infatti ovviamente in questo caso l'immagine $\pi(\mathcal{A})$ é ancora commutativa, essendo $AB = BA$, e dunque poiché π é una rappresentazione:

$$\pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A)$$

Inoltre se $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}$, allora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) = M_1(\mathbb{C})$ che é commutativa (come deve essere), mentre se ad esempio fosse $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}^2$ si avrebbe $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) = M_2(\mathbb{C})$, non commutativa, ma che contiene la sottoalgebra commutativa massimale delle matrici diagonali 2×2 (a meno di coniugio), che é evidentemente riducibile (un simile argomento vale per ogni dimensione finita, tralasciamo la dimostrazione nel caso di dimensione infinita). Ne segue che nel caso commutativo i settori di superselezione contengono un solo elemento $\mathcal{V}_\pi = \{\omega\}$, dunque in tal caso non é valido nessun principio di sovrapposizione: non é possibile formare una sovrapposizione di due stati puri perché ce ne é uno solo.

Diversamente, nel caso generale di una C^* -algebra \mathcal{A} non commutativa, possono aversi sue rappresentazioni irriducibili di dimensione maggiore di 1, infatti considerando la rappresentazione atomica, che é fedele:

$$A \in \mathcal{A} \longmapsto \bigoplus_{\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \pi_\omega(A)$$

se ogni rappresentazione irriducibile fosse di dimensione 1, \mathcal{A} sarebbe sottoalgebra di un'algebra commutativa (le matrici diagonali di ordine $|\mathcal{P}(\mathcal{A})|$) dunque commutativa a sua volta.

Ora sappiamo che in generale, se π é irriducibile, esiste una corrispondenza 1-1:

$$\xi \in \mathbb{P}\mathcal{H}_\pi \longleftrightarrow \omega_\xi \circ \pi \in \mathcal{V}_\pi \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

Se $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ hanno norma 1, gli stati associati sono:

$$\omega_\xi(\cdot) = (\xi, \pi(\cdot)\xi)$$

$$\omega_\eta(\cdot) = (\eta, \pi(\cdot)\eta)$$

Se ξ ed η sono linearmente indipendenti allora $\omega_\xi \neq \omega_\eta$, quindi:

$$\dim \mathcal{H}_\pi > 1 \iff |\mathcal{V}_\pi| > 1$$

Siano dunque ξ ed η linearmente indipendenti di norma 1, e $x := a\xi + b\eta$, con $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $\|x\| = \|a\xi + b\eta\| = 1$, allora possiamo formare un nuovo stato puro $\omega_x = \omega_{a\xi+b\eta}$ detto **sovrapposizione** di ω_ξ e ω_η :

$$\begin{aligned} \omega_x(A) &= \omega_{a\xi+b\eta} \circ \pi(A) = (a\xi + b\eta, \pi(A)(a\xi + b\eta)) = |a|^2(\xi, \pi(A)\xi) + |b|^2(\eta, \pi(A)\eta) + \\ &+ 2\Re \bar{a}b(\xi, \pi(A)\eta) = |a|^2\omega_\xi(A) + |b|^2\omega_\eta(A) + 2\Re \bar{a}b(\xi, \pi(A)\eta) \end{aligned}$$

L'ultimo termine é detto **termine di interferenza**, ed é responsabile ad esempio degli effetti di diffrazione degli elettroni. Il termine di interferenza fa sí che ciò che si ottiene non é una combinazione convessa di stati. Se non ci fosse il termine di interferenza allora avremmo ottenuto effettivamente una combinazione convessa non triviale e dunque non uno stato puro ma una miscuglio statistico. Si puó dimostrare che un caso in cui ciò si verifica é quello in cui ω_ξ e ω_η non appartengono allo stesso settore di superselezione: in questo caso le fasi relative non formano piú il termine di interferenza necessario ad avere ancora uno stato puro, ma abbiamo una combinazione convessa non triviale ovvero un miscuglio statistico. Questo implementa l'argomento originale WWW sull'origine delle regole di superselezione, mostrando come il principio di sovrapposizione vale soltanto all'interno delle famiglie \mathcal{V}_π dette settori di superselezione.

Abbiamo stabilito che grazie al principio di sovrapposizione possiamo, a partire da due stati puri, formarne uno nuovo, detto appunto sovrapposizione, che é ancora uno stato puro. Abbiamo anche affermato che gli stati puri rappresentano stati del sistema fisico con "preparazione ottimale", ovvero conoscenza migliore possibile: ora vogliamo vedere come si giustifichi tale asserzione.

Ricordiamo che in Meccanica Quantistica una **proposizione** o (**questione**) é un osservabile $Q \in \mathcal{O}$ tale che $\sigma_{ph}(Q) = \{0, 1\}$.

Le questioni in Meccanica Quantistica hanno il significato fisico di "proprietá", e i valori dello spettro hanno il seguente significato:

0: non ho la proprietá Q

1: ho la proprietá Q

I valori di aspettazione delle questioni hanno la seguente notevole interpretazione:

$$\omega(Q) = \frac{\text{n}^\circ \text{ di misurazioni con esito positivo}}{\text{n}^\circ \text{ di misurazioni totali}} = \text{probabilitá di avere la proprietá Q in } \omega$$

Gli esempi principali di questioni sono i proiettori ortogonali (idempotenti autoaggiunti $E = E^2 = E^*$) su sottospazi chiusi dello spazio di Hilbert: l'autovalore é 1 se il vettore della base a cui sono applicati appartiene al sottospazio, 0 se appartiene al complemento ortogonale. I proiettori rivestono una particolare importanza quando abbiamo a che fare con algebre di von Neumann, per diversi motivi. Innanzitutto é possibile dimostrare che ogni algebra di von Neumann é generata come spazio di Banach dai suoi proiettori: questo avrá un particolare significato fisico in teoria dei campi dove

le algebre di von Neumann sono oggetti pervasivi (gli osservabili locali sono generati da osservabili “elementari” che sono appunto le proposizioni). Inoltre ogni algebra di von Neumann si “spezza” in integrale diretto di fattori (algebre di von Neumann con centro banale), e dando un’opportuna nozione di “dimensione” di una proiezione é possibile dare una classificazione dei fattori delle algebre di von Neumann: questo è un importante terreno di ricerca della matematica contemporanea.

Consideriamo ora una generica algebra di von Neumann \mathcal{R} . Uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ è detto **normale** se per ogni rete positiva monotona crescente e limitata superiormente (cioè $\{A_\alpha\} \subseteq \mathcal{R}_+$ tale che $A_\alpha \geq A_{\alpha'}$ se $\alpha \geq \alpha'$, e con un maggiorante $c1$) si ha:

$$\sup_{\alpha} \omega(A_\alpha) = \omega(\sup_{\alpha} A_\alpha)$$

Un’algebra di von Neumann \mathcal{R} è una C^* -algebra con un folium chiuso distinto di stati normali $\mathcal{S}_n(\mathcal{R})$. Questo folium ha le seguenti proprietà:

(i) Se $A, B \in \mathcal{R}$ sono tali che $\omega(A) = \omega(B)$ per ogni $\omega \in \mathcal{S}_n(\mathcal{R})$, allora $A = B$.

(ii) Sia $f : \mathcal{S}_n(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione limitata tale che per ogni $\lambda \in [0, 1]$, e $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}_n(\mathcal{R})$:

$$f(\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2) = \lambda f(\omega_1) + (1 - \lambda)f(\omega_2)$$

Allora esiste $A \in \mathcal{R}$ tale che:

$$f(\omega) = \omega(A)$$

Se $\omega \in \mathcal{S}_n(\mathcal{R})$ è uno stato normale, per ogni rete $\{A_\alpha\}$ positiva monotona crescente e limitata superiormente, la scrittura:

$$f(\omega) := \sup_{\alpha} \omega(A_\alpha)$$

definisce una funzione lineare limitata su $\mathcal{S}_n(\mathcal{R})$. Per costruzione esiste $A \in \mathcal{R}$ con $f(\omega) = \omega(A)$, dove A è dato da:

$$A = \sup_{\alpha} A_\alpha$$

Stati non normali sono detti **singolari** ed sono caratterizzati ad esempio alla maniera seguente. Sia $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}$ una *-sottoalgebra ultradebolmente densa di \mathcal{R} , e sia $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$ un suo stato. Per il Teorema di Hahn-Banach ω possiede un’estensione ad uno stato di \mathcal{R} . L’estensione è normale solo se ω ultradebolmente continuo. Per questo motivo a volte, per abuso di linguaggio, si definisce anche uno stato normale su un’algebra di von Neumann come uno stato ultradebolmente continuo.

Diamo ora un’importante definizione: l’**algebra di von Neumann invilupante** di una C^* -algebra \mathcal{A} é per definizione $\hat{\pi}(\mathcal{A})''$, cioè l’algebra di von Neumann generata dalla rappresentazione universale di \mathcal{A} . Si può dimostrare che $\hat{\pi}(\mathcal{A})'' \cong \mathcal{A}^{**}$ (biduale di \mathcal{A}). Se consideriamo l’algebra di von Neumann invilupante allora gli elementi di \mathcal{A}_{aa}^{**} sono detti **ossevabili generalizzati** o **idealizzati**. Consideriamo ora un elemento $B \in \hat{\pi}(\mathcal{A})''$. Per il Teorema di densità di Kaplanski esiste una successione generalizzata $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{A}$, con $\|A_\alpha\| \leq \|B\|$, tale che:

$$B = \lim\text{-f}_{\alpha} A_\alpha$$

Corrispondentemente, per densità (si ricordi che, poichè la rappresentazione universale è fedele, $\mathcal{A} \cong \hat{\pi}(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\hat{\pi}(\mathcal{A})}^{ud} \cong \hat{\pi}(\mathcal{A})''$, dove nell’ultimo passaggio abbiamo usato il Teorema di densità di von Neumann), ogni funzionale lineare e continuo, dunque in particolare ogni stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, possiede un’unica estensione nell’algebra di von Neumann invilupante $\tilde{\omega} \in \hat{\pi}(\mathcal{A})'_* = \mathcal{A}^*$ tale che:

$$\tilde{\omega}(B) = \lim\text{-f}_{\alpha} \omega(A_\alpha)$$

Il numero $\tilde{\omega}(B)$ é naturalmente il **valor medio** di B in $\tilde{\omega}$, per definizione.

Si può dimostrare il seguente risultato:

Teorema 1.1.13 *Consideriamo il centro dell'algebra di von Neumann involucente $Z(\hat{\pi}(\mathcal{A})'') = \hat{\pi}(\mathcal{A})' \cap \hat{\pi}(\mathcal{A})''$. Allora i proiettori di $Z(\hat{\pi}(\mathcal{A})'')$ sono in corrispondenza 1-1 con le classi di quasi-equivalenza di rappresentazioni di \mathcal{A} in modo tale che:*

$$\begin{aligned} \pi \approx \pi' &\iff Z(\pi) = Z(\pi') \\ \pi \lesssim \pi' &\iff Z(\pi) \leq Z(\pi') \\ \pi \circ \pi' &\iff Z(\pi)Z(\pi') = 0 \end{aligned}$$

Torniamo al caso di una generica algebra di von Neumann \mathcal{R} , e consideriamo uno stato vettoriale ultradebolmente continuo $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_*$ indotto dal vettore $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$. Il **supporto** di ω , indicato con $P_\omega \in \mathcal{R}$, é per definizione il piú piccolo proiettore di \mathcal{R} tale che $P_\omega \xi = \xi$, e dunque tale che $\omega(P_\omega) = (\xi, P_\omega \xi) = 1$. In altre parole:

$$P_\omega \xi = \bigwedge \{P \in \mathcal{R} : P\xi = \xi\} = \bigwedge \{P \in \mathcal{R} : \omega(P) = 1\}$$

dove il simbolo \bigwedge é usato al posto del simbolo di intersezione \cap nel caso di algebre di von Neumann (per fare riferimento a delle proprietà "reticolari" di queste ultime, che non tratteremo).

Si può anche dimostrare che $P_\omega = E_{\overline{\mathcal{R}'\xi}}$, ovvero $P_\omega \mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}'\xi}$.

Tutto ciò vale per stati vettoriali di algebre di von Neumann, ma ciò non é restrittivo, infatti se \mathcal{A} é una C^* -algebra, ogni stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ é uno stato vettoriale della rappresentazione universale $\omega \in \mathcal{V}_{\hat{\pi}}$, ed é quindi naturalmente associato all'algebra di von Neumann involucente:

$$\omega(\cdot) = (\hat{\xi}_\omega, \hat{\pi}(\cdot)\hat{\xi}_\omega)$$

In questo caso $\mathcal{R} = \hat{\pi}(\mathcal{A})'' \cong \mathcal{A}^{**}$, e si ha la corrispondenza:

$$\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \longrightarrow P_\omega \in \mathcal{A}^{**} \cong \hat{\pi}(\mathcal{A})''$$

dove P_ω é il supporto dello stato ω , ovvero della sua estensione normale $\tilde{\omega}$ (ω é automaticamente ultradebolmente continuo in \mathcal{A}^{**}). Inoltre:

$$P_\omega \hat{\mathcal{H}} = \overline{\hat{\pi}(\mathcal{A})'\hat{\xi}_\omega}$$

Ricordando l'interpretazione fisica dei proiettori e dei loro valori medi, possiamo affermare che il supporto di uno stato ha il significato fisico di **proprietá caratteristica** di ω , cioè la piú piccola proprietá posseduta da ω con certezza (intersezione di tutte le proprietá possedute da ω con certezza). Una volta definito il supporto di uno stato, la **probabilitá di transizione** da uno stato φ a uno stato ω é per definizione $P_{\varphi,\omega} := \tilde{\varphi}(P_\omega) = (\hat{\xi}_\omega, P_\varphi \hat{\xi}_\omega)$, cioè la probabilitá di trovare in φ la proprietá caratteristica di ω . Si noti che in generale questa formula non é simmetrica, e che $P_{\omega,\omega} = \tilde{\omega}(P_\omega) = 1$ come deve essere.

Vogliamo ora riportare alcuni risultati di base sulla probabilitá di transizione.

Proposizione 1.1.14 *Siano $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Allora:*

- (1) $P_{\varphi,\omega} = 0 \iff P_{\omega,\varphi} = 0 \iff P_\omega \perp P_\varphi \iff \omega \perp \varphi$
- (2) $P_{\varphi,\omega} = 1 \iff P_\varphi \leq P_\omega$

Si può dimostrare inoltre che $\pi_\omega \circ \pi_\varphi$ implica che $\omega \perp \varphi$, mentre non é vero il viceversa.

Si noti che $P_{\varphi,\omega} = 1$ in generale non implica che $\varphi = \omega$, a meno che non si tratti di stati puri. Vale infatti il seguente:

Teorema 1.1.15 *Risulta:*

- (1) $P_{\varphi,\omega} = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \overline{C_\omega}^{\|\cdot\|}$
 (2) $\forall \omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), P_{\varphi,\omega} = 1 \Leftrightarrow \varphi = \omega$

Questo Teorema permette di chiarificare il significato fisico degli stati puri: se ω é puro allora la proprietá caratteristica di ω determina univocamente ω . Ció non é vero in generale per stati non puri, come vedremo fra breve. Una conseguenza di quest'ultimo Teorema é la seguente:

Lemma 1.1.16 $P_\omega \in \mathcal{A}^{**}$ é minimale fra i proiettori di \mathcal{A}^{**} se e solo se ω é uno stato puro.

Ricordiamo alcune formule per calcolare la probabilitá di transizione.

Teorema 1.1.17 Siano $\omega, \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, con $\omega(\cdot) = (\xi, \pi_\omega(\cdot)\xi)$, e $\varphi(\cdot) = (\eta, \pi_\varphi(\cdot)\eta)$. Si ha:

$$P_{\varphi,\omega} = P_{\omega,\varphi} = 1 - \frac{1}{4}\|\varphi - \omega\|^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_\varphi \perp \pi_\omega \\ |(\xi, \eta)|^2 & \text{se } \pi_\varphi \cong \pi_\omega \end{cases}$$

La penultima formula é anche nota in letteratura con il nome di formula di Roberts-Roepstorff.

Dunque la probabilitá di transizione tra due stati relativi a settori di superselezione diversi é sempre nulla, la probabilitá di transizione é tra due stati é non nulla soltanto all'interno di uno stesso settore.

Lemma 1.1.18 Sia $\omega \in \text{Conv}\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Allora esistono $\{\lambda_j\} \subseteq \mathbb{C}$ e $\{\omega_j\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ tali che:

$$\omega = \sum_j \lambda_j \omega_j, \text{ con } \omega_i \perp \omega_j \ (\Leftrightarrow P_{\omega_i, \omega_j} = 0)$$

Teorema 1.1.19 Siano $\omega, \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, con $\omega \perp \varphi$. Allora $\forall a, b > 0, a + b = 1$ si ha $P_{a\omega+b\varphi} = P_\omega + P_\varphi$.

Quest'ultimo risultato ci mostra che se ω non é puro la proprietá caratteristica di ω non determina univocamente ω .

Corollario 1.1.20 $P_\omega = \sum_j P_{\omega_j}$

Lemma 1.1.21 Siano $\omega, \varphi \in \text{Conv}\mathcal{P}(\mathcal{A})$, con $\omega = \sum_j \lambda_j \omega_j$, $P_{\omega_j, \omega_k} = 0$, per $j \neq k$, e $\varphi = \sum_k \mu_k \varphi_k$. Allora:

$$P_{\varphi,\omega} = \sum_{j,k} \mu_k P_{\varphi_k, \omega_j}$$

Si noti che nell'ultima formula non compaiono piú i λ_j .

Concludiamo questa sezione riassumendo le linee guida del formalismo algebrico trattato finora. L'assunzione fondamentale che si fa é che descrivere un sistema fisico é equivalente ad assegnare una C^* -algebra che individua gli osservabili della teoria: questo approccio é quindi fedele alla filosofia originale di Heisenberg della Meccanica Quantistica e ne costituisce una naturale evoluzione. L'algebra di osservabili sará dunque un'algebra di operatori. La Meccanica Classica rappresenta, in quest'ottica, un caso particolare di Meccanica Quantistica in cui la C^* -algebra degli osservabili é commutativa. In tal caso

essa é necessariamente isomorfa all'algebra delle funzioni continue su un qualche spazio topologico localmente compatto di Hausdorff, che rappresenta lo spazio delle fasi.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra e $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ lo spazio dei suoi stati. Le seguenti condizioni sono equivalenti e caratterizzano le **teorie classiche**:

- (i) \mathcal{A} é commutativa
- (ii) ogni coppia di osservabili é compatibile
- (iii) non esistono fluttuazioni quantistiche su stati puri, cioè se $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ é uno stato puro allora $(\Delta_\omega A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}$
- (iv) ogni rappresentazione irriducibile π di \mathcal{A} é 1-dimensionale ; i settori di superselezione \mathcal{V}_π contengono un solo elemento ciascuno, $\{\omega\}$, dunque é impossibile formare una sovrapposizione di due stati puri
- (v) la probabilità di transizione tra due stati puri distinti é sempre nulla, poiché essi appartengono a settori di superselezione diversi: se $\omega, \omega' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ allora $P_{\omega, \omega'} = 0$ se $\omega \neq \omega'$, e $P_{\omega, \omega'} = 1$ se $\omega = \omega'$

Il caso generale di **teorie quantistiche** é caratterizzato invece dalle seguenti condizioni equivalenti:

- (i) \mathcal{A} é non commutativa
- (ii) non tutti gli osservabili sono compatibili
- (iii) esistono stati puri con fluttuazioni quantistiche
- (iv) esistono rappresentazioni irriducibili π di \mathcal{S} di dimensione maggiore di 1, cioè $\dim \mathcal{H}_\pi > 1$; esistono settori di superselezione contenenti piú di un elemento ed in cui vale il principio di sovrapposizione: é possibile sovrapporre due stati puri ottenendo ancora uno stato puro
- (v) può aversi una probabilità di transizione non nulla tra due stati puri distinti appartenenti allo stesso settore di superselezione

Si noti che nella teoria classica costruire uno stato puro senza dispersione ($(\Delta_\omega A)^2 = 0$), sebbene sia lecito teoricamente, può essere in pratica impossibile poiché ogni misurazione é affetta da un errore (sono possibili tuttavia approssimazioni arbitrariamente vicine). Nelle teorie quantistiche invece ciò diventa impossibile anche in teoria: questo rispecchia il fatto che si deve tenere conto dell'influenza della misurazione stessa sul sistema.

1.2 Simmetrie e teoria di Wigner

Nel contesto della formulazione algebrica della Meccanica Quantistica, la vecchia teoria di Dirac rappresenta il caso in cui si ha un solo settore di superselezione: ciò corrisponde, come vedremo, al fatto di avere a che fare con un numero finito di gradi di libertà. In tal caso, come noto, esiste un'unica classe (modulo equivalenza unitaria) di rappresentazioni irriducibili π , per cui $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}_\pi = \mathbb{P}\mathcal{H}_\pi$. Gli stati puri sono vettori, a meno della loro lunghezza e verso (direzioni, o raggi) in uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_π . In altre parole essi sono in corrispondenza 1-1 con gli elementi dello spazio di Hilbert proiettivo delle funzioni d'onda:

$$\mathbb{P}\mathcal{H}_\pi = \{[\psi] \in \mathcal{H}_\pi : \|\psi\| = 1, \psi \sim \psi' \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \psi' = z\psi\} = \mathcal{V}_\pi$$

In quanto segue, poiché per l'unicità non sussiste possibilità di equivoco, indicheremo semplicemente con \mathcal{H} lo spazio di Hilbert \mathcal{H}_π corrispondente al nostro unico settore di superselezione.

Gli osservabili sono operatori lineari autoaggiunti A su \mathcal{H} , e il valore di aspettazione di un osservabile A in uno stato ψ é:

$$\langle A \rangle_\psi := (\psi, A\psi)$$

Inoltre si suppone che \mathcal{H} sia separabile (caso di osservabili con spettro discreto) e si considera $\mathcal{A} \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$. In tal caso:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{**} \cong \widehat{\pi}(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Infatti si ha che $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* \simeq \{\text{operatori nucleari (o di classe traccia) su } \mathcal{H}\}$ e che $\{\text{operatori nucleari su } \mathcal{H}\}^* \simeq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dunque gli osservabili generalizzati sono gli elementi di $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{aa}$.

Consideriamo l'algebra $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ ottenuta aggiungendo i multipli complessi dell'operatore identico, ovvero l'algebra composta dagli elementi del tipo $A + \lambda I$, con $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. L'algebra $\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ è generata, come sottospazio chiuso, dall'identità e dagli operatori di rango 1 $|\phi\rangle\langle\psi|$, con $\phi, \psi \in \mathcal{H}$, dunque uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})})$ è fissato dai suoi valori $\omega(|\phi\rangle\langle\psi|)$, per tutti i $\phi, \psi \in \mathcal{H}$. In questo modo è possibile definire un operatore ρ mediante i suoi elementi di matrice:

$$(\phi, \rho\psi) \equiv \omega(|\psi\rangle\langle\phi|)$$

Si vede facilmente che ρ è limitato, poiché:

$$\omega(A) \leq \|A\|$$

e:

$$\| |\psi\rangle\langle\phi| \| = \| |\psi\rangle\langle\phi| \phi\rangle\langle\psi| \|^{1/2} = \|\phi\| \cdot \|\psi\|$$

Inoltre ρ è positivo, poiché essendo $|\phi\rangle\langle\phi| \geq 0$, si ha:

$$(\phi, \rho\phi) = \omega(|\phi\rangle\langle\phi|) \geq 0$$

Infine ρ è di classe traccia, poiché per ogni sistema ortonormale $\{\phi_n\} \subseteq \mathcal{H}$ si ha:

$$\sum_{n=1, N} (\phi_n, \rho\phi_n) = \omega(\sum_{n=1, N} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|) \leq 1$$

Inversamente, ogni stato $\omega \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{K}(\mathcal{H})})$ è caratterizzato da un operatore ρ positivo, tracciabile, con $tr\rho \leq 1$:

$$\omega(A + \lambda I) = tr(\rho A) + \lambda, \text{ con } A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

e possiede la decomposizione in folia disgiunti:

$$\omega = tr\rho \frac{tr(\rho)}{tr\rho} + (1 - tr\rho)\omega_\infty$$

dove $\omega_\infty(A + \lambda I) := \lambda$.

Consideriamo il folium con $tr\rho = 1$. Sia f un funzionale lineare sugli operatori di classe traccia, limitato sulle matrici densità. Allora la scrittura:

$$f(|\phi\rangle\langle\phi|) \equiv (\phi, A\phi)$$

definisce un operatore lineare limitato A su \mathcal{H} . Viceversa, ogni $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definisce un funzionale lineare sugli operatori di classe traccia. Dunque la matrici densità formano il folium degli stati normali sull'algebra di von Neumann $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, cioè funzionali lineari positivi e normalizzati nel preduale $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$.

Siano ω, φ due stati normali individuati dalle matrici densità ρ, σ rispettivamente:

$$\omega(\cdot) = tr(\rho \cdot)$$

$$\varphi(\cdot) = tr(\sigma \cdot)$$

Supponiamo che ω, φ siano stati puri. Ma allora ρ, σ hanno rango 1, cioè $\rho = \rho^* = \rho^2$, $\sigma = \sigma^* = \sigma^2$, e sono minimali rispetto a questa condizione, ovvero $\rho = P_\omega$, e $\sigma = P_\varphi$. Dunque la probabilità di transizione é data da:

$$P_{\omega, \varphi} = \omega(P_\varphi) = \omega(\sigma) = tr(\rho\sigma) = tr(\sigma\rho) = \varphi(\rho) = \varphi(P_\omega) = P_{\varphi, \omega}$$

come deve essere (si noti che abbiamo usato la commutatività della traccia).

Introduciamo ora una nozione di simmetria; due formulazioni della teoria basate su due spazi di Hilbert diversi $\mathcal{H}_{(1)}$ e $\mathcal{H}_{(2)}$ sono equivalenti se esiste una mappa unitaria (in modo che conservi i prodotti scalari):

$$U : \mathcal{H}_{(1)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(2)} \\ \psi_{(1)} \longmapsto U\psi_{(1)} := \psi_{(2)}$$

tale che gli operatori relativi agli stessi osservabili nelle due teorie $A_{(1)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{(1)})$ e $A_{(2)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{(2)})$ sono legati da:

$$A_{(2)} = UA_{(1)}U^{-1}$$

E' noto che la formulazione hamiltoniana della Meccanica Classica ha il vantaggio, rispetto a quella lagrangiana, di evidenziare il maggior numero di simmetrie della teoria, che sono rappresentate dalle trasformazioni canoniche. Gli operatori unitari sono nel nostro caso l'analogo delle trasformazioni canoniche della teoria classica: essi sono dunque la nozione più generale di simmetria nella teoria quantistica.

Il primo tipo di simmetrie che si incontra in pratica è quello delle cosiddette simmetrie geometriche sulle funzioni d'onda (traslazioni nello spazio e nel tempo, rotazioni). Osserviamo che tali simmetrie possono avere una duplice interpretazione come simmetrie *attive* (un'effettivo spostamento della configurazione fisica del sistema) e simmetrie *passive* (un semplice cambiamento di riferimento): tale distinzione tuttavia è di natura puramente convenzionale, poiché è impossibile distinguere a priori tra le due alternative, a meno di non considerare un addizionale sistema di riferimento "assoluto", rispetto al quale effettuare questa rilevazione.

Ricordiamo che la legge di evoluzione temporale libera nello spazio di Hilbert è data dall'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

dove $\psi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3s)$, con d^3s =misura di Lebesgue, ed $H = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V$ è l'hamiltoniana di una particella quantistica non relativistica.

Se $H = H^*$ allora abbiamo una soluzione che vive nello spazio di Hilbert infinito-dimensionale:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(0)$$

generalizzazione della soluzione finito-dimensionale data in termini di un esponenziale di matrici. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ otteniamo un gruppo a un parametro fortemente continuo, cioè una famiglia di unitari:

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

tale che:

$$\mathcal{U}(t+t') = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}(t')$$

e:

$$\mathcal{U}(t)\psi \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \psi, \forall \psi \in \mathcal{H}$$

Per il Teorema di Stone vale anche il viceversa: ogni gruppo a un parametro fortemente continuo ammette un generatore autoaggiunto che induce tale gruppo tramite la formula esponenziale. Tale generatore è dato in generale dall'espressione:

$$A = \frac{1}{i} \left[\frac{d}{dt} \mathcal{U}(t) \right]_{t=0}$$

Nel nostro caso il generatore autoaggiunto è proprio l'hamiltoniana $H = H^*$, che assume il significato di *energia totale* (la quale infatti si conserva durante un'evoluzione imperturbata). Dunque in tal caso H è il generatore di una particolare simmetria che è la **traslazione nel tempo** (detta anche **evoluzione unitaria**).

Consideriamo ora una **traslazione nello spazio** della funzione d'onda:

$$(\mathcal{U}(\vec{a})\psi)(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \vec{a}) \text{ con } \vec{a}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Analogamente, ciò fornisce una rappresentazione del gruppo delle traslazioni spaziali (\mathbb{R}^3), che grazie al Teorema di Stone (in n variabili) è data da:

$$\mathcal{U}(\vec{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{a}}$$

dove \vec{p} è un operatore che ha il significato di *impulso totale*.

Traslazioni spaziali e temporali possono essere combinate opportunamente a formare traslazioni spazio-temporali, che formano un gruppo commutativo isomorfo ad \mathbb{R}^4 . Una traslazione spazio-temporale determinata da un vettore $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$ è rappresentata da:

$$\mathcal{U}(\vec{a}) = e^{iP_\mu a^\mu}$$

dove i generatori infinitesimali P_μ sono 4 operatori autoaggiunti che commutano tra di loro, che costituiscono le componenti dell'*energia-impulso*: P_0 rappresenta l'*energia totale* mentre le P_i sono le componenti del *momento lineare* o *impulso*.

Consideriamo infine una **rotazione**:

$$(\mathcal{U}(R)\psi)(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}) \text{ con } R \in SO(3), \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Se ci limitiamo a considerare, per semplicità, rotazioni antiorarie di un angolo θ attorno alla direzione \vec{n} dell'asse z , il generico elemento di $SO(3)$ si scrive:

$$R_{\vec{n},\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed agisce su un vettore $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ nella seguente maniera ovvia:

$$R_{\vec{n},\theta} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ x_3 \end{pmatrix}$$

In tal caso $R_{\vec{n},\theta}$ è rappresentato da:

$$\mathcal{U}(R_{\vec{n},\theta}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{L}\cdot\vec{n})\theta}$$

dove $\vec{L} = \vec{q} \wedge \vec{p}$ è l'operatore ottenuto tramite la formula:

$$\frac{1}{i} \left[\frac{d}{dt} \mathcal{U}(R_{\vec{n},\theta}) \right] \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{\hbar} (\vec{L} \cdot \vec{n})$$

ed ha il significato di *momento angolare totale*.

Come si vedrà, in generale l'invarianza per rotazioni sarà descritta piuttosto da una rappresentazione del rivestimento universale di $SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, che è il gruppo $Spin(3) := SU(2) \cong S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, definito da:

$$SU(2) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A^t \bar{A} = I, \det(A) = 1\}$$

In generale la funzione d'onda è funzione sia dello spazio che del tempo:

$$\psi = \psi(\vec{x}, t), \text{ dove } (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^4 \text{ (spazio-tempo classico)}$$

quindi si possono considerare combinazioni arbitrarie delle precedenti simmetrie.

L'insieme delle trasformazioni di questo tipo, assieme alle trasformazioni che fanno passare da un sistema in quiete ad un sistema in moto rettilineo uniforme, formano il gruppo di Galilei, che costituisce il gruppo delle simmetrie geometriche della fisica non relativistica.

La teoria relativistica si ottiene prendendo come gruppo di simmetrie geometriche della teoria il **gruppo di Poincaré**:

$$\mathcal{P} := \mathbb{R}^4 \ltimes \mathcal{L}$$

dove \mathcal{L} è il **gruppo di Lorentz**, che ha come elementi le rotazioni spaziali e le cosiddette **trasformazioni di Lorentz pure** (dette anche **boost**), cioè elementi del tipo:

$$\Lambda(s) = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) & 0 & 0 \\ \sinh(s) & \cosh(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementi di questo tipo rappresentano boost nella direzione x^1 (in questo esempio stiamo considerando come prima coordinata il tempo e le restanti coordinate come coordinate spaziali), e formano un sottogruppo a 1 parametro $\Lambda(s)$ del gruppo di Lorentz che trasforma in sé stessi i cosiddetti *wedge*, ovvero le regioni dello spazio-tempo di Minkowski della forma:

$$W = \{x \in \mathcal{M} : x^1 > \|x^0\|_{\mathcal{M}}, x^2, x^3 \text{ arbitrari} \}$$

Componendo le trasformazioni di Lorentz pure con le rotazioni si ottengono tutte le trasformazioni nel gruppo di Lorentz.

Le trasformazioni di Lorentz (in particolare quelle pure) hanno la caratteristica di trattare il tempo come una semplice coordinata e non come un parametro assoluto: questo provoca i fenomeni cosiddetti di dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze, caratteristici delle teorie relativistiche.

Il gruppo di Lorentz è un gruppo di Lie localmente compatto 6-dimensionale composto di 4 componenti connesse:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$$

La componente connessa dell'identità è il **gruppo di Lorentz ristretto** \mathcal{L}_+^\uparrow , che contiene le trasformazioni di Lorentz che preservano l'orientazione spaziale e temporale. Le altre componenti connesse si ottengono da \mathcal{L}_+^\uparrow per composizione con un'*inversione spaziale, temporale e totale*.

Corrispondentemente il prodotto semidiretto $\mathcal{P}_+^\uparrow := \mathbb{R}^4 \ltimes \mathcal{L}_+^\uparrow$ è detto **gruppo di Poincaré ristretto**.

Il gruppo di Poincaré è un gruppo di Lie localmente compatto, 10-dimensionale. Gli elementi di \mathcal{P} si indicano con (x, Λ) , con $x \in \mathbb{R}^4$ e $\Lambda \in \mathcal{L}$, e si compongono come:

$$(x, \Lambda)(x', \Lambda') = (x + \Lambda x', \Lambda \Lambda')$$

Così come per descrivere le traslazioni temporali si può usare il formalismo di Heisenberg, anche le altre operazioni di simmetria possono essere descritte per mezzo di un operatore che agisce sugli osservabili. In altre parole vogliamo estendere la nozione di simmetria agli osservabili stessi.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra. Un **automorfismo** di \mathcal{A} è uno $*$ -isomorfismo di \mathcal{A} su sé stessa. Un **antiautomorfismo** di \mathcal{A} è una funzione $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ moltiplicativa ($\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$) biunivoca e $*$ -antilineare (lineare col coniugato). L'insieme degli automorfismi di \mathcal{A} si denota $\text{Aut}(\mathcal{A})$ mentre quello degli antiautomorfismi è $\text{AntiAut}(\mathcal{A})$. $\text{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo rispetto alla composizione, mentre $\text{AntiAut}(\mathcal{A})$ non è un gruppo. Inoltre se $A \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ si ha per definizione $\|\alpha(A)\| = \|A\|$, per cui su $\text{Aut}(\mathcal{A})$ resta indotta la topologia uniforme (cioè della norma) rispetto alla quale il prodotto è continuo per definizione, dunque $\text{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo topologico. Si noti che se $\dim \mathcal{A} < \infty$ allora $\text{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo di Lie di matrici.

Si ha:

Lemma 1.2.1 *Una C^* -algebra con identità é lo spazio vettoriale generato dai suoi elementi unitari.*

Il seguente Teorema caratterizza gli automorfismi di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

Teorema 1.2.2 $Aut(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \frac{U(\mathcal{H})}{\mathbb{T}}$

Una **simmetria** sugli osservabili \mathcal{O} é una trasformazione $\eta : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ tale che:

- (1) é 1-1 su \mathcal{O}
- (2) é \mathbb{R} -lineare
- (3) $\eta(A^2) = \eta(A)^2$

In particolare se $\mathcal{O} \equiv \mathcal{A}_{aa}$ la definizione si particularizza e si parla di **automorfismi di Jordan**.

Teorema 1.2.3 (Kadison) *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra con centro $\mathbb{C} \cdot I$ (tale che ammette una rappresentazione fedele irriducibile). Allora ogni automorfismo di Jordan di \mathcal{A}_{aa} é restrizione di un automorfismo o di un antiautomorfismo di \mathcal{A} .*

Dunque una simmetria della teoria é un automorfismo o un antiautomorfismo della C^* -algebra degli osservabili:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ A &\longmapsto \alpha(A) \end{aligned}$$

L'unione di queste trasformazioni forma il gruppo di simmetrie della C^* -algebra. Un gruppo G é detto **gruppo di simmetrie** di una teoria quantistica se é dato un omomorfismo:

$$\begin{aligned} \alpha : G &\longrightarrow Aut(\mathcal{A}) \cup AntiAut(\mathcal{A}) \\ g &\longmapsto \alpha_g \end{aligned}$$

Ad ogni elemento $g \in G$ corrisponde una particolare simmetria di \mathcal{A} .

In realtà se G é un gruppo di Lie connesso si vede subito che $\alpha_g \in Aut(\mathcal{A})$ per ogni $g \in G$, ossia gli antiautomorfismi non intervengono. Infatti ogni elemento di gruppo é quadrato di qualche altro elemento, inoltre poiché α é un omomorfismo $\alpha_{g^2} = \alpha_g^2$, ed infine il prodotto di due antiautomorfismi é un automorfismo. In definitiva, ricordando il Teorema 1.2.2 ed il Teorema di Gelfand-Naimark non commutativo, possiamo affermare che se G é un gruppo di Lie connesso le simmetrie di una teoria quantistica sono descritte da una rappresentazione del gruppo di simmetria G per mezzo di automorfismi di \mathcal{A} :

$$\alpha : G \longrightarrow Aut(\mathcal{A})$$

Il discorso sulla covarianza relativistica della teoria puó essere facilmente implementato nell'ambito della teoria delle simmetrie. Vogliamo trovare l'analogo della relazione:

$$A_{(2)} = U A_{(1)} U^{-1}$$

in una formulazione basata sugli osservabili.

D'ora in poi ci limiteremo al caso in cui G é un gruppo di Lie connesso. Sia α l'omomorfismo associato al gruppo di simmetria G :

$$\begin{aligned} \alpha : G &\longrightarrow Aut(\mathcal{A}) \\ g &\longmapsto \alpha_g \end{aligned}$$

Una rappresentazione π di \mathcal{A} si dice **covariante** se esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua \mathcal{U} di G tale che:

$$\pi(\alpha_g(A)) = \mathcal{U}(g)\pi(A)\mathcal{U}(g)^{-1} \quad (\star)$$

cioé:

$$\pi \circ \alpha_g = Ad\mathcal{U}(g) \circ \pi \equiv \mathcal{U}(g)\pi(\cdot)\mathcal{U}(g)^{-1}$$

In altre parole si ha che $\pi \cong \pi \circ \alpha_g$.

Ci sono casi in cui ciò non si verifica. Può accadere che un elemento $g \in G$ sia rappresentato da un automorfismo α_g , ma che, data una rappresentazione π , non esista un operatore unitario $\mathcal{U}(g)$ che soddisfi la (\star) , cioè che π e $\pi \circ \alpha_g$ non siano unitariamente equivalenti: in tal caso si ha una cosiddetta **rottura spontanea di simmetria** nella rappresentazione π .

Vedremo che nella teoria quantistica per un numero finito di gradi di libertà l'algebra generata dalle relazioni canoniche di commutazione (algebra di Weyl) ammette una sola classe di equivalenza unitaria di rappresentazioni: dunque in questo caso non può esserci rottura spontanea di simmetria.

Situazione diversa in teoria dei campi, dove non vale un simile risultato di unicità: possono esistere ad esempio stati di equilibrio non invarianti rispetto ad un gruppo di simmetrie della teoria, ovvero ad un gruppo di automorfismi dell'algebra dei campi. In particolare può essere rotta una simmetria di gauge, che non agisce sugli osservabili.

Sappiamo che $\text{Aut}(\mathcal{A})$ è un gruppo topologico (sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{A})$) quindi possiamo chiederci se α sia continua o meno. Se α è continua, allora:

$$\|\alpha_g - 1\| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0 \implies \|\omega \circ \alpha_g - \omega\| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0, \forall \omega$$

Uno stato ω è detto stato **regolare** per α se la sua orbita è continua, cioè se:

$$\|\omega \circ \alpha_g - \omega\| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0$$

Una rappresentazione π di \mathcal{A} è detta **α -regolare** se, dato $\omega \in \mathcal{V}_\pi$, $g \mapsto P_{\omega, \omega \circ \alpha_g}$ è continua.

Se π è irriducibile, per la formula di Roberts-Roepstorff ($P_{\omega, \varphi} = 1 - \frac{1}{4}\|\varphi - \omega\|^2$) π è α -regolare se e solo se ogni $\omega \in \mathcal{V}_\pi$ è regolare. In definitiva quindi sarà opportuno assumere la continuità di α ([Sim68],[Wigh60]).

Consideriamo l'insieme $U = \{g : \|\omega \circ \alpha_g - \omega\| < 2\}$, ed osserviamo che se ω è regolare per α , allora U è un intorno dell'identità e del gruppo di Lie G , e quindi genera G come gruppo, essendo G connesso (se G è un gruppo topologico connesso, ogni intorno dell'identità genera l'intero gruppo). Se oltre ad essere regolare ω è anche puro, allora gli stati $\omega \circ \alpha_g$ sono stati vettoriali della stessa rappresentazione GNS π_ω di ω , se $g \in U$ per il Teorema di Glimm-Kadison la rappresentazione $\pi_\omega \circ \alpha_g = \pi_{\omega \circ \alpha_g}$ è unitariamente equivalente a π_ω , dunque esiste un operatore unitario $V_g \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\omega)$ tale che:

$$\pi_\omega(\alpha_g(A)) = V_g \pi_\omega(A) V_g^{-1}, \text{ con } A \in \mathcal{A}, g \in G$$

e quindi, dato che U genera G , per ogni $g = g_1 \dots g_n \in G$, con $\{g_i\} \in U$, ponendo $V_g := V_{g_1} \dots V_{g_n}$ si ha ancora un operatore unitario.

Consideriamo l'operatore di allacciamento unitario V_g , definito a meno di multipli complessi modulo 1 (e dunque sullo spazio di Hilbert proiettivo in questione): ciò significa che $V'_g = \eta(g)V_g$ per qualche $\eta(g) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \mathbb{T}$ è ancora un operatore di allacciamento. Inoltre si può vedere che, per un'opportuna scelta di η , V'_g è una rappresentazione di G quando $H^2(G, \mathbb{T}) = 1$.

Teorema 1.2.4 (Bargmann'54, Wigner'39) Sia G un gruppo di Lie connesso, e $g \mapsto \alpha_g$ una mappa fortemente continua. Supponiamo inoltre che:

(i) $\pi_1(G) = \{0\}$, ovvero G é semplicemente connesso (proprietá globale)

(ii) $H^2(L(G), \mathbb{R}) = \{0\}$ (proprietá locale)

Allora $H^2(G, \mathbb{T}) = 1$ e dunque esiste η tale che $V_g = \eta(g)\mathcal{U}(g)$, con \mathcal{U} rappresentazione unitaria fortemente continua, il che rende covariante π .

Facciamo alcuni esempi.

(1) Il Teorema di Bargmann-Wigner si applica ai gruppi ad un parametro ($G = \mathbb{R}$), ad esempio alle traslazioni nel tempo della teoria:

$$\pi : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha_t$$

In questo caso ogni rappresentazione regolare é covariante:

$$\pi(\alpha_t(A)) = \mathcal{U}(t)\pi(A)\mathcal{U}(t)^{-1}$$

con $\mathcal{U}(t) = e^{iHt}$, dove H é l'hamiltoniana del sistema nella rappresentazione π (non necessariamente un operatore limitato).

(2) Un esempio in cui il Teorema non vale é $G = \mathbb{R}^2$, che non soddisfa la (ii). Il tipico elemento di $H^2(L(G), \mathbb{R})$ é del tipo $\sigma(z, z') = -\frac{1}{2}\mathbb{I}m \bar{z}z'$. Situazione analoga per $G = \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^6$.

(3) Un altro esempio in cui il Teorema non vale é $SO(3)$, che non é semplicemente connesso (non vale la (i)).

L'ultimo esempio, in cui non é soddisfatta l'ipotesi (i), può essere aggiustato con un semplice accorgimento. Se infatti G é un gruppo di Lie connesso, ma non semplicemente connesso, é sempre possibile considerare il suo rivestimento universale \tilde{G} (come varietá differenziabile), che é ancora un gruppo di Lie, ed é semplicemente connesso. Inoltre G e \tilde{G} hanno la stessa algebra di Lie:

$$L(G) = L(\tilde{G})$$

che é determinata da un intorno dell'identitá (la trasformazione di rivestimento é un diffeomorfismo locale). Quindi é sempre possibile ripetere i nostri ragionamenti sostituendo \tilde{G} a G per avere l'ipotesi (i) del Teorema di Bargmann-Wigner sempre soddisfatta (la semplice connessione). In tal caso, se α é la rappresentazione di G , e $\eta : \tilde{G} \rightarrow G$ é la trasformazione di rivestimento, allora si pone:

$$\tilde{\alpha} := \alpha \circ \eta$$

$\tilde{\alpha}$ é una rappresentazione di \tilde{G} , e se:

$$U|_{\ker \eta} = I$$

allora la rappresentazione (π, \mathcal{U}) é covariante per \tilde{G} (rappresentazione covariante di $(\mathcal{U}, \tilde{\alpha})$):

$$\tilde{G} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \text{Aut}(\mathcal{A})$$

$$\eta \downarrow \nearrow \alpha$$

$$G$$

Dunque esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua $\mathcal{U} : \tilde{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ tale che:

$$\pi(\tilde{\alpha}_g(A)) = \mathcal{U}(g)\pi(A)\mathcal{U}(g)^{-1} \quad g \in \tilde{G}, A \in \mathcal{A}$$

Un esempio tipico di questa situazione é dato dal caso, a cui già abbiamo accennato, delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni $SO(3)$, non semplicemente connesso, che possono essere rimpiazzate dalle rappresentazioni del suo rivestimento universale $SU(2) \equiv Spin(3)$.

Ora vogliamo esporre brevemente le idee di Wigner che storicamente hanno dato origine alla teoria generale della simmetria vista finora, e che ne rappresentano il caso particolare in cui il gruppo delle simmetrie é il gruppo di Poincaré, o meglio la sua componente connessa dell'identità costituita dal gruppo di Poincaré ristretto $G \equiv \mathcal{P}_+^\uparrow$ (l'ipotesi di connessione su G ci impone di non considerare in questa analisi l'inversione spaziale, temporale, e totale).

Ricordiamo che una mappa **antiunitaria** é un'applicazione $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ antilineare tale che:

$$(Tx, Ty) = \overline{(x, y)} = (y, x), \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Supponiamo di avere due stati puri ψ e φ , ad esempio uno relativo alla condizione iniziale di un sistema fisico, e l'altro con il significato di unico autostato relativo ad un proiettore 1-dimensionale E . La probabilità che il sistema inizialmente in ψ esibisca la proprietà E in φ é dunque:

$$P_{\psi, \varphi} = |(\psi, \varphi)|^2$$

Vogliamo ora effettuare una simmetria geometrica facendo agire un elemento del gruppo di Poincaré ristretto $g = (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ (non facciamo distinzione tra il carattere attivo/passivo di tale simmetria). Indichiamo con ψ_g e φ_g i trasformati di ψ e φ tramite $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$:

$$\psi_g = g\psi$$

$$\varphi_g = g\varphi$$

La probabilità di transizione definisce il contenuto fisico e deve dunque essere invariante per simmetrie geometriche della teoria. Dunque la probabilità di transizione tra ψ e φ deve rimanere invariata se essi sono trasformati tramite lo stesso elemento del gruppo:

$$P_{\psi, \varphi} = |(\psi, \varphi)|^2 = |(\psi_g, \varphi_g)|^2 = P_{\psi_g, \varphi_g}$$

Tenendo fisso $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ e facendo scorrere ψ su tutti gli stati (ossia su tutti i raggi unitari di \mathcal{H}) otteniamo una mappa sugli stati T_g dipendente dall'elemento $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$:

$$T_g\psi = \psi_g$$

Questa mappa deve lasciare invariata la probabilità di transizione tra ogni coppia di stati:

$$P_{T_g\psi, T_g\varphi} = P_{\psi, \varphi}$$

ovvero:

$$|(T_g\psi, T_g\varphi)|^2 = |(\psi, \varphi)|^2$$

Inoltre questa mappa deve soddisfare la legge di composizione del gruppo di Poincaré:

$$T_g T_{g'} = T_{gg'}$$

In particolare quest'ultima formula implica che T_g ha un inverso, quindi T_g manda l'insieme di tutti i raggi in sé stesso.

Si ha il seguente risultato:

Teorema 1.2.5 (Wigner '39) *Una trasformazione \hat{T} sui raggi che conserva la probabilità di transizione tra ogni coppia di raggi dello spazio di Hilbert é sempre indotta da una trasformazione T sui vettori additiva e isometrica:*

$$T(\psi_1 + \psi_2) = T\psi_1 + T\psi_2$$

$$\|T\psi\|^2 = \|\psi\|^2$$

Questa trasformazione sui vettori é determinata a meno di un fattore di fase arbitrario (numero complesso di modulo 1) da \hat{T} e dalle condizioni precedenti. Si ha uno dei seguenti casi:

$$Ta\psi = aT\psi$$

$$Ta\psi = \bar{a}T\psi$$

con $a \in \mathbb{C}$. Nel primo caso T è un operatore lineare unitario, nel secondo è antilineare e antiunitario.

Osserviamo che il Teorema di Wigner può essere dedotto dal Teorema di Kadison.

Come sappiamo nel caso di \mathcal{P}_+^\uparrow , che è un gruppo, la possibilità di operatori antiunitari è esclusa poiché ogni elemento di gruppo è quadrato di qualche altro elemento e il prodotto di due antiunitari è unitario. A questo proposito possiamo dire tuttavia che la condizione spettrale implica che l'unica trasformazione fisicamente rilevante implementata da un antiunitario è l'inversione temporale.

Dunque ad ogni trasformazione di Poincaré $g = (a, \Lambda)$ corrisponde un operatore unitario $U_g \equiv U(a, \Lambda)$ che agisce sullo spazio di Hilbert, determinato a meno di un fattore di fase unitario $e^{i\alpha}$. La legge di moltiplicazione diventa:

$$U_{g_1}U_{g_2} = \eta U_{g_1g_2}$$

Qui η è un fattore di fase che dipende da g_1 e g_2 . Così U è una rappresentazione a meno di un fattore, ossia una rappresentazione proiettiva del gruppo di Poincaré ristretto \mathcal{P}_+^\uparrow . Poiché resta la libertà di cambiare ogni operatore U_g di una fase arbitraria, si può usare ciò per semplificare la funzione di fase η . Il fattore di fase η può essere eliminato se consideriamo i g_j in $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ piuttosto che in \mathcal{P}_+^\uparrow , mentre in quest'ultimo caso è ridotto ad un segno ± 1 .

Si può dimostrare il seguente:

Teorema 1.2.6 *Ogni rappresentazione proiettiva continua unitaria irriducibile del gruppo di Poincaré ristretto \mathcal{P}_+^\uparrow è indotta canonicamente, mediante una scelta opportuna delle fasi, da un'unica rappresentazione continua unitaria irriducibile del gruppo di ricoprimento $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$.*

In conclusione l'invarianza di $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ nella teoria quantistica significa che abbiamo una rappresentazione unitaria di $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ che descrive gli effetti delle trasformazioni dei vettori di stato dello spazio di Hilbert. L'intervenire del gruppo di ricoprimento segue dal fatto che gli stati corrispondono a raggi piuttosto che a vettori in \mathcal{H} .

Il punto di arrivo, o se si vuole l'assunzione fondamentale di tutta la teoria di Wigner sulla simmetria è l'individuazione dei sistemi elementari della fisica quantistica relativistica. Partendo unicamente dal requisito fondamentale di invarianza relativistica tali sistemi fisici vengono identificati da un punto di vista cinematico e classificati tramite le rappresentazioni unitarie irriducibili (dunque non ulteriormente decomponibili), a energia positiva, del gruppo $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Corrispondentemente gli spazi di Hilbert di queste rappresentazioni vengono interpretati come gli spazi degli stati per tutte le più piccole "unità relativistiche" presenti nella teoria quantistica. Inoltre, nell'articolo [BW48] Wigner e Bargmann dimostrano che le rappresentazioni continue (a doppio valore) unitarie ed irriducibili del gruppo di Poincaré ristretto sono in corrispondenza 1-1 con le equazioni relativistiche le cui soluzioni rappresentano funzioni d'onda di particelle libere.

La classificazione delle rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré ristretto è un compito di natura prettamente matematica, che può essere effettuato con il metodo delle rappresentazioni indotte, dovuto a Wigner ed ispirato alla teoria

di Frobenius per gruppi discreti, e successivamente generalizzato da Mackey a gruppi localmente compatti.

Riportiamo i risultati fondamentali della teoria senza pretesa di rigore nè di completezza.

Consideriamo un gruppo di Lie connesso G che agisce sullo spazio vettoriale finito-dimensionale V tramite l'omomorfismo continuo:

$$g \in G \mapsto \alpha_g \in \text{Aut}(V)$$

e consideriamo il prodotto semidiretto $V \rtimes G$.

Indicando con \widehat{V} il gruppo duale di V , si verifica facilmente che resta definita un'azione di G su \widehat{V} tramite l'omomorfismo continuo:

$$g \in G \mapsto \hat{\alpha}_g \in \text{Aut}(\widehat{V})$$

dove:

$$\hat{\alpha}_g(\varphi)(v) = \varphi(\alpha_g^{-1}(v)) \quad \varphi \in \widehat{V}, v \in V$$

Il risultato fondamentale della teoria, dovuto a Wigner e Mackey, stabilisce che, se esiste una sezione boreliana per l'azione di $\hat{\alpha}$, determinare tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo $V \rtimes G$ equivale a descrivere tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili degli stabilizzatori (piccoli gruppi nel linguaggio fisico) del gruppo G rispetto alla sua azione sul duale \widehat{V} .

Inoltre faremo l'ipotesi che per ogni $\varphi \in \widehat{V}$ esiste una misura G -invariante μ_φ sul gruppo duale \widehat{V} con supporto contenuto nell'orbita di φ sotto l'azione di G .

Il caso che ci interessa è naturalmente quello in cui $G \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow$, che agisce per automorfismi su $V = \widehat{V} \equiv \mathbb{R}^4$, per cui il prodotto semidiretto $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{P}_+^\uparrow$ è proprio il gruppo di Poincaré ristretto.

Le orbite di \mathcal{L}_+^\uparrow prodotte dalla sua azione su \mathbb{R}^4 sono date da:

- l'origine $\{0\}$
- gli *iperboloidi di massa* (*mass shell*) contenuti rispettivamente nel cono di luce futuro

e passato:

$$\Omega_m^\pm := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \|\vec{x}\|_{\mathcal{M}}^2 = m^2, \text{ con } \pm x^0 > 0, m \geq 0\} = \Omega_m^+ \cup \Omega_m^-$$

dove con $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ abbiamo indicato la pseudonorma di Minkowski indotta da $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

In particolare per $m=0$ si ottengono rispettivamente le superfici del cono di luce futuro/passato $\Omega_0^\pm = V^\pm$.

- l'*iperboloide spacelike* a una falda:

$$\Omega_{im} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \|\vec{x}\|_{\mathcal{M}}^2 = -m^2, \text{ con } \pm x^0 > 0, m > 0\}$$

Il rivestimento universale del gruppo di Lorentz ristretto \mathcal{L}_+^\uparrow è dato dal gruppo lineare speciale:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow \equiv SL(2, \mathbb{C}) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$$

Per descrivere la trasformazione di rivestimento, rappresentiamo ogni vettore $\vec{x} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$ mediante una matrice 2x2:

$$\tilde{x} = x^0 I + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato le **matrici di Pauli**:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui valgono le seguenti notevoli relazioni di commutazione:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$$

$$[\sigma_1, \sigma_3] = -2i\sigma_2$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$$

Osserviamo che le matrici di Pauli munite del commutatore generano un'algebra di Lie isomorfa ad (\mathbb{R}^3, \wedge) .

Si noti che usando questa rappresentazione si ha:

$$\det \tilde{x} = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{M}}^2$$

La trasformazione di rivestimento è data da:

$$A \in SL(2, \mathbb{C}) \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow \longmapsto \Lambda(A) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

in modo tale che:

$$\tilde{x} \in \mathbb{R}^4 \longmapsto \Lambda(A)x = A\tilde{x}A^*$$

Le orbite dell'azione del gruppo di Lorentz ristretto \mathcal{L}_+^\uparrow su \mathbb{R}^4 coincidono con le orbite date dall'azione del suo rivestimento universale $SL(2, \mathbb{C})$ su questo spazio.

Gli stabilizzatori associati a queste orbite sono dati da:

- caso $\{0\}$: lo stabilizzatore è tutto $SL(2, \mathbb{C})$
- caso Ω_m^\pm , $m > 0$: lo stabilizzatore associato è dato dal gruppo spinoriale $SU(2) \equiv Spin(3)$

- caso Ω_0^\pm : lo stabilizzatore è dato dall'insieme delle matrici del tipo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ a & e^{-\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2$$

che possono interpretarsi come movimenti rigidi del piano.

- caso Ω_{im} , $m > 0$: lo stabilizzatore è dato da $SL(2, \mathbb{R})$

Sappiamo che l'energia-impulso $P^\mu \equiv g^{\mu\nu}P_\nu$ è composto da 4 operatori autoaggiunti (di cui P^0 ha il significato di energia totale del sistema) che commutano tra di loro: dunque questi operatori hanno un spettro congiunto. Poichè energia e impulso sono i generatori delle traslazioni, di solito si usa come spazio di coordinate lo spazio delle p 4-dimensionale, al quale si può passare a partire dallo spazio delle coordinate usuali tramite la trasformata di Fourier: dunque i valori spettrali dell'energia-impulso saranno contenuti in un sottoinsieme dello spazio delle p .

Consideriamo ora un elemento $\alpha \in \widetilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow$ che determina una trasformazione di Lorentz $\Lambda(\alpha) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, rappresentata da $U(\alpha)$.

L'azione di $U(\alpha)$ sui generatori delle traslazioni soddisfa la seguente condizione di covarianza:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\alpha)P^\nu = U(\alpha)^{-1}P^\mu U(\alpha)$$

che segue dalla legge di moltiplicazione del gruppo di Poincaré. Dunque $U(\alpha)$ mappa $\sigma(P^\mu)$ in $\Lambda(\alpha)[\sigma(P^\mu)]$.

Ne segue lo spettro del quadrimpulso di una rappresentazione continua unitaria irriducibile di $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ è concentrato sulle singole orbite:

$$\begin{aligned}\sigma(P^\mu) &\subseteq \Omega_m^+ \\ \sigma(P^\mu) &\subseteq \Omega_m^- \\ \sigma(P^\mu) &\subseteq \Omega_{im} \\ \sigma(P^\mu) &\subseteq \{0\}\end{aligned}$$

a seconda dei valori di m e P^0 . Ora, per un principio fondamentale di stabilità della teoria quantistica dei campi, l'energia P^0 deve avere un estremo inferiore. Dunque consideriamo soltanto rappresentazioni che soddisfano la **condizione spettrale**:

$$P^2 = m, \text{ con } m \geq 0 \text{ e } P^0 \geq 0$$

Per chiarire questa condizione ricordiamo che data una rappresentazione unitaria fortemente continua U di \mathbb{R}^4 su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , lo **spettro** di U , $Sp(U)$ è il supporto della misura spettrale determinata da U , ovvero lo spettro congiunto dei suoi generatori $P^\mu, \mu = 0, \dots, 3$. Una rappresentazione è detta una **rappresentazione ad energia positiva** se $Sp(U) \subseteq \overline{V^+}$, o equivalentemente se i generatori P_μ di U hanno sono tali che $\sigma(P^\mu) \subseteq \overline{V^+}$, il che equivale alla condizione spettrale.

In altre parole nella nostra analisi considereremo soltanto rappresentazioni ad energia positiva: questo ci porta a considerare come fisicamente interessanti soltanto le orbite $\{0\}, \Omega_m^+$ e Ω_0^+ , e ad escludere Ω_m^-, Ω_0^- e Ω_{im} .

Ogni misura regolare positiva Lorentz-invariante concentrata su un singolo iperboloide Ω_m^+ è data, nello spazio delle p , da un multiplo positivo di:

$$d\Omega_m^+ := \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2+m}}$$

dove d^3p è la misura di Lebesgue nelle coordinate sull'iperboloide date dal 3-impulso.

Poiché P^μ è l'energia-impulso, la costante m che parametrizza le orbite di \mathcal{L}_+^\uparrow su \mathbb{R}^4 assume il significato di *massa* della particella.

Prima di enunciare i risultati di classificazione delle rappresentazioni irriducibili di \mathcal{P}_+^\uparrow occorre dire qualcosa sulle algebre di Lie dei gruppi interessati.

Sappiamo che l'algebra di Lie di un gruppo di Lie si identifica con lo spazio tangente all'identità con le operazioni di somma, prodotto per uno scalare, e bracket (commutatore) $[\cdot, \cdot]$.

Inoltre un gruppo di Lie possiede la stessa algebra di Lie del suo rivestimento universale, o di un suo sottogruppo che sia una componente connessa dell'identità.

Dunque il gruppo di Poincarè possiede la stessa algebra di Lie del gruppo di Poincarè ristretto, e del suo rivestimento universale:

$$L(\mathcal{P}) = L(\mathcal{P}_+^\uparrow) = L(\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow) = L(\mathbb{R}^4 \times \mathcal{L}_+^\uparrow) = L(\mathbb{R}^4 \times SL(2, \mathbb{C}))$$

Consideriamo ora $Spin(3) \equiv SU(2)$ ed osserviamo che per definizione:

$$SU(2) \subseteq SL(2, \mathbb{C})$$

ovvero il rivestimento universale del gruppo di Lorentz ristretto contiene come sottogruppo il rivestimento universale delle rotazioni, nella componente connessa dell'identità. Ne segue che per le algebre di Lie si ha:

$$L(SO(3)) = L(SU(2))$$

L'operatore momento angolare totale incontrato in precedenza può essere scritto anche come $\vec{L} \equiv \frac{1}{2}\vec{\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, dove σ_j sono le matrici di Pauli, che costituiscono i generatori infinitesimi delle rotazioni.

In definitiva l'algebra di Lie del gruppo di Poincarè contiene i generatori infinitesimi delle traslazioni, delle rotazioni, e dei boosts, che soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [L^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu) \\ [L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho}L^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}L^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}L^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}L^{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

L'algebra di Lie del gruppo di Poincarè non è *semisemplice*, poichè lo spazio vettoriale generato dagli elementi $\{P^i\}_{i=0,1,2,3}$ costituisce un suo ideale bilatero.

Introduciamo il cosiddetto **operatore di Pauli-Lubanski**, definito come:

$$W_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu L^{\rho\sigma}$$

dove $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ è il *tensore numerico di Levi-Civita*, dato da:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} := \begin{cases} 1 & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ è una permutazione pari di } 0123 \\ -1 & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ è una permutazione dispari di } 0123 \\ 0 & \text{se una qualsiasi coppia di indici è uguale} \end{cases}$$

L'operatore di Pauli-Lubanski soddisfa le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [W^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [W^\mu, W^\nu] &= i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma \\ [L^{\mu\nu}, W^\lambda] &= i(g^{\lambda\nu}W^\mu - g^{\lambda\mu}W^\nu) \end{aligned}$$

Prendendo $P^2 = P^\mu P_\mu$ e $W^2 = W^\mu W_\mu$ si ottengono:

$$\begin{aligned} [P^2, P^\mu] &= 0 \\ [P^2, L^{\mu\nu}] &= 0 \\ [P^\mu, W^2] &= 0 \\ [L^{\mu\nu}, W^2] &= 0 \end{aligned}$$

Dunque P^2 e W^2 sono *elementi di Casimir* dell'algebra di Lie del gruppo di Poincarè, cioè sono funzioni dei generatori di un'algebra di Lie che commutano con ogni elemento dell'algebra, e dunque in una rappresentazione irriducibile, per il Lemma di Schur, devono ridursi ad un multiplo dell'identità. Tramite gli operatori P^2 e W^2 Wigner e Bargmann classificano le rappresentazioni continue irriducibili del gruppo $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Infatti per quanto osservato una rappresentazione continua $U : \widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ è irriducibile se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tali che:

$$\begin{aligned} P^2 &= \lambda_1 I \\ W^2 &= \lambda_2 I \end{aligned}$$

ovvero P^2 e W^2 sono multipli dell'identità nello spazio in cui sono realizzate le rappresentazioni irriducibili di $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, per cui i loro autovalori possono usarsi per classificare tali rappresentazioni.

Enunciamo finalmente i risultati di classificazione delle rappresentazioni irriducibili di \mathcal{P}_+^\uparrow ottenuti tramite il metodo delle rappresentazioni indotte di Wigner-Mackey, concentrando la nostra attenzione sulle orbite di interesse per la fisica, selezionate dalla condizione spettrale.

- caso Ω_m^+ , $m > 0$ [$P^2 = m^2$, con $P^0 > 0$]

In questo caso lo stabilizzatore associato è dato dal rivestimento universale delle rotazioni, o gruppo spinoriale $SU(2) \equiv Spin(3) \cong S^3$ che è connesso e compatto. Per completezza $SU(2)$ possiede un insieme completo di rappresentazioni unitarie irriducibili di dimensione $2s + 1$ (con $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{N} \cup \{0\})$) non equivalenti tra loro:

$$D^s : \text{SU}(2) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{C}^{2s+1})$$

In altre parole ogni rappresentazione continua unitaria e irriducibile di $\text{SU}(2)$ è di dimensione finita ed è somma diretta di rappresentazioni siffatte.

Grazie al Teorema di Wigner-Mackey, per ognuna di esse resta indotta un'unica rappresentazione (a meno di equivalenza unitaria):

$$U^{[m,s]} : \widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}^{[m,s]})$$

dove $\mathcal{H}^{[m,s]} := L^2(\Omega_m^+, \mathbb{C}^{2s+1}, d\Omega_m^+)$ è lo spazio delle funzioni $f : \Omega_m^+ \rightarrow \mathbb{C}^{2s+1}$ a quadrato sommabile. Ogni tale rappresentazione è dunque caratterizzata dai parametri $[m, s]$, dove $m > 0$ è la *massa*, ed $s \in \frac{1}{2}(\mathbb{N} \cup \{0\})$ è la *spin* della particella. In questo caso i valori ammissibili per l'operatore W^2 sono dati da:

$$W^2 = -m^2 s(s+1)$$

con m, s come sopra. Pertanto una rappresentazione $U^{[m,s]}$ descrive una particella quantistica libera di massa a riposo $m > 0$ e spin s sola nell'universo. La teoria di Wigner-Mackey prescrive anche la struttura del relativo spazio degli stati: un generale vettore di stato è caratterizzato da una funzione d'onda $\widetilde{\psi}_k(p)$ a $2s+1$ componenti nello spazio delle p ; per passare da questo spazio allo spazio delle q si può usare la trasformata/antitrasformata di Fourier.

Un tipico esempio di particella nel senso di Wigner appartenente a questa classe è l'**eletttrone** ($m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, $s = \frac{1}{2}$).

- caso $\Omega_0^+ \equiv V^+$ [$P^2 = 0$, con $P^0 > 0$]

Lo stabilizzatore associato è dato dalle matrici del tipo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ a & e^{-\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2$$

che si interpretano come movimenti rigidi del piano.

Sono possibili i seguenti due casi:

- l'origine

In questo caso restano indotte delle rappresentazioni:

$$U^{[0,s]} : \widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}^{[0,s]})$$

dove $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, è un parametro che assume il significato di *elicità* della particella, ed $\mathcal{H}^{[0,s]} := L^2(\Omega_0^+, \mathbb{C}, d\Omega_0^+)$: tali rappresentazioni sono dunque caratterizzate dai parametri $[0, s]$.

In questo caso anche $W^2 = 0$, poichè vale la relazione:

$$W^\mu = sP^\mu$$

Le rappresentazioni $U^{[0,s]}$ descrivono particelle libere di massa nulla ed elicità s .

Un'esempio di particella di Wigner in questa classe è dato dal **fotone** ($m = 0$, $s = 1$).

- circonferenze di centro l'origine

In tal caso si ottengono rappresentazioni di dimensione ∞ , che non sembrano comparire in natura (non sono state mai osservate particelle di elicità ∞).

- caso $\{0\}$ [$P^2 = 0$, con $P^0 = 0$]

In questo caso lo stabilizzatore è l'intero gruppo $SL(2, \mathbb{C})$, quindi le rappresentazioni unitarie irriducibili associate a questa orbita sono quelle indotte dalle rappresentazioni continue unitarie irriducibili di $SL(2, \mathbb{C})$, classificate da Bargmann in [Bar47].

In questo caso l'operatore energia-impulso è l'operatore nullo, per cui gli stati di questa classe sono tutti invarianti per traslazioni; se sono anche Lorentz-invarianti allora si ottiene la rappresentazione banale che rappresenta fisicamente il vuoto.

La altre possibilità in questa classe hanno un interesse fisico trascurabile.

In conclusione usando la teoria di Wigner si ottiene una classificazione dei sistemi elementari della fisica quantistica relativistica in cui, se si escludono i casi di cui non si conosce un riscontro fisico, si ritrovano le particelle elementari osservate in natura. Tuttavia si noti che la nozione di particella di Wigner non coincide esattamente con la usuale nozione di particella elementare, che ha un significato dinamico. Si tratta di una nozione più astratta, emblematica della filosofia di Wigner (ereditata da Dirac) secondo cui “ad ogni oggetto esistente nella matematica sottostante deve corrispondere qualcosa di esistente in natura”. In altre parole la nozione di rappresentazione irriducibile sembra essere “la” nozione fondamentale necessaria per una formalizzazione matematica (puramente cinematica) del concetto di particella elementare. In questo senso la teoria di Wigner rappresenta uno dei tentativi più fruttuosi di unificazione della Teoria Quantistica con i principi della Relatività Ristretta.

1.3 Procedure di quantizzazione

Nella prima sezione abbiamo introdotto la formulazione quantistica come un formalismo generale all'interno del quale la teoria classica si ritrova come caso speciale. Storicamente però è avvenuto il passaggio inverso, ovvero si è partiti da modelli lagrangiani classici, a cui successivamente si applicarono diverse procedure di “quantizzazione”, che vogliamo ora richiamare.

Tratteremo prima il caso finito-dimensionale (sistemi dinamici con un numero finito di gradi di libertà) per cui vale un risultato di unicità per la rappresentazione dell'algebra degli osservabili (il che come sappiamo corrisponde in particolare ad avere un solo settore di superselezione nella teoria). Successivamente affronteremo il caso infinito-dimensionale (proprio della Teoria Quantistica dei Campi) in cui la quantizzazione si applica ad un sistema dinamico con infiniti gradi di libertà. Come vedremo, nel caso infinito-dimensionale non vale più nessun risultato di unicità per la rappresentazione degli osservabili; inoltre quest'ultimo caso, a differenza di quello finito-dimensionale, sarà manifestamente covariante.

La necessità di avere a disposizione infiniti gradi di libertà si può spiegare ricordando che, come è avvenuto fin dall'inizio della teoria (anni 1920-'30), un campo quantistico può essere pensato come “quantizzazione” di un campo classico (originariamente il campo elettromagnetico della teoria di Maxwell), assimilabile ad un sistema continuo. Questa impostazione è rimasta anche in seguito quando, con l'avvento delle teorie per la forza debole e la forza forte (teorie intrinsecamente quantistiche, cioè che non hanno un analogo classico come l'elettromagnetismo o la teoria della gravitazione), si è resa necessaria un'interpretazione dei campi in termini di particelle: nella Teoria Quantistica dei Campi si instaurerà infatti un dualismo particelle/campi analogo al dualismo particelle/onde della Meccanica Quantistica tradizionale, in cui il campo gioca un ruolo analogo al vecchio ruolo ricoperto dall'onda quantistica.

Nel caso finito-dimensionale, non relativistico, le particelle sono date a priori, mentre nel caso relativistico il passaggio da campi a particelle è espresso mediante la costruzione di

uno spazio di Hilbert (chiamato *spazio di Fock*) che contiene vettori di stato per un numero arbitrario di particelle identiche, e sul quale agiscono i cosiddetti operatori di creazione e distruzione, che hanno l'effetto di aumentare (o diminuire) di una unità il numero di particelle presenti nello stato a cui sono applicate. Mediante tali operatori è possibile dare una definizione matematica precisa di campo libero (non interagente) in modo da soddisfare gli assiomi di Wightman. Una analoga definizione non si applica nel caso di campi interagenti, la cui trattazione viene affrontata dunque mediante un formalismo perturbativo.

1.3.1 Quantizzazione canonica

Si parte dal formalismo canonico della Meccanica Classica, in cui c'è uno **spazio delle configurazioni** i cui punti sono descritti da coordinate q_k ($k = 1, \dots, n$), che rappresentano le posizioni. Ad ogni coordinata di posizione è associata una coordinata p_k detta **impulso canonico coniugato**. Complessivamente le q_k e le p_k variano in uno spazio симплетico $2n$ -dimensionale detto **spazio delle fasi**. La "quantizzazione canonica" consiste nel rimpiazzare queste variabili con operatori autoaggiunti $Q_k, P_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{aa}$ che soddisfano le **relazioni canoniche di commutazione (di Heisenberg)**:

$$\begin{aligned} [Q_k, Q_l] &= 0 \\ [P_k, P_l] &= 0 \\ [P_k, Q_l] &\subseteq \frac{\hbar}{i} \delta_{kl} \end{aligned}$$

Si noti che se confrontiamo il commutatore $[\cdot, \cdot]$ con le parentesi di Poisson $\{ \cdot, \cdot \}$ allora le relazioni canoniche di commutazione sono l'analogo quantistico delle parentesi di Poisson fondamentali in Meccanica Classica. E' possibile dimostrare che \mathcal{H} non può avere dimensione finita. Nella rappresentazione di Schroedinger $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, d^n s)$, con $d^n s$ = misura di Lebesgue n -dimensionale. Osserviamo inoltre che Q_k e P_k non sono operatori limitati, dunque a rigore dobbiamo considerare l'estensione del commutatore. Gli operatori Q_k e P_k sono dati da:

$$\begin{aligned} (Q_k x)(s) &= s_k x(s) \\ (P_k x)(s) &= -i \frac{\partial}{\partial s_k} x(s) \end{aligned}$$

allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Q_k} &= \{x \in \mathcal{H} : (s \mapsto s_k x(s)) \in \mathcal{H}\} \\ \mathcal{D}_{P_k} &= \{x \in \mathcal{H} : (s \mapsto s_k \hat{x}(s)) \in \mathcal{H}\} \end{aligned}$$

dove $\hat{x} \equiv \mathcal{F}x$ è la trasformata di Fourier in L^2 . Infatti si ha:

$$\mathcal{F}Q_k \mathcal{F}^{-1} = P_k$$

e quindi:

$$\begin{aligned} [Q_k, Q_l] &= [P_r, P_s] = 0 \\ [P_k, Q_r] &\subseteq -\delta_{kr} I \end{aligned}$$

Definiamo gli **operatori di Weyl** come le mappe $U, V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ date da:

$$\begin{aligned} U(\alpha) &:= e^{i\langle \alpha, q \rangle} \\ V(\alpha) &:= e^{i\langle \alpha, p \rangle} \end{aligned}$$

Gli operatori di Weyl sono due rappresentazioni unitarie fortemente continue di \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} U(\alpha)U(\alpha') &= U(\alpha\alpha') \\ V(\alpha)V(\alpha') &= V(\alpha\alpha') \end{aligned}$$

infatti:

$$\begin{aligned} (U(\alpha)x)(s) &= e^{i\langle \alpha, s \rangle} x(s) \\ (V(\alpha)x)(s) &= x(s + \alpha) \end{aligned}$$

sono operatori unitari (ovvio) e fortemente continui (TCD). Viceversa, per il Teorema di Stone in n variabili, date due rappresentazioni unitarie fortemente continue di \mathbb{R}^n , U e V , possiamo dedurre che esse sono sempre di questo tipo, cioè della forma:

$$U(\alpha) := e^{i\langle \alpha, q \rangle}$$

$$V(\alpha) := e^{i\langle \alpha, p \rangle}$$

per opportuni operatori autoaggiunti q e p .

La rappresentazione per mezzo delle U e V dell'algebra generata dagli operatori q e p si dice **rappresentazione di Schroedinger**. Per il Teorema di Stone possiamo scrivere:

$$\frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U(\alpha) x \right)_{\alpha=0}(s) = s_j(x)(s)$$

$$\frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} V(\alpha) x \right)_{\alpha=0}(s) = -i \frac{\partial}{\partial s_j} x(s) = p_j(x)(s)$$

Inoltre:

$$(V(\beta)U(\alpha))(s) = U(\alpha)(x)(s + \beta) = e^{i\alpha \cdot s + \beta} x(s + \beta) = e^{i\alpha \cdot \beta} e^{i\alpha \cdot s} x(s + \beta) = e^{i\alpha \cdot \beta} (U(\alpha)V(\beta)x)(s)$$

Abbiamo ottenuto le **regole di commutazione di Weyl**:

$$V(\beta)U(\alpha) = e^{i\langle \alpha, \beta \rangle} U(\alpha)V(\beta)$$

Si può dimostrare che le regole di commutazione di Weyl per U, V implicano quelle di Heisenberg per le q_k e p_k , mentre il viceversa non vale. Sussiste infine il seguente risultato:

Teorema 1.3.1 *La rappresentazione di Schroedinger è irriducibile.*

E' possibile dare un'espressione equivalente per le relazioni di Weyl, una volta introdotto il seguente oggetto, chiamato **operatore di von Neumann**:

$$W(z) := e^{\frac{i}{2}\alpha \cdot \beta} U(\alpha)V(\beta), \text{ con } z = \alpha + i\beta$$

Si può vedere che, in termini dell'operatore di von Neumann le relazioni di Weyl sono equivalenti a:

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z, z')} W(z + z') \quad (\bullet)$$

dove $\sigma(z, z') = -\frac{1}{2} \text{Im} \langle z, z' \rangle$ è una forma symplettica.

Definiamo il **gruppo di Heisenberg** come il prodotto semidiretto:

$$H_n := \mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$$

ovvero l'insieme:

$$H_n := \{(z, \lambda) : z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

con l'operazione:

$$(z, \lambda)(z', \lambda') = (z + z', \lambda + \lambda' + \sigma(z, z'))$$

tale che la mappa:

$$(z, \lambda) \mapsto e^{i\lambda} W(z) = \mathcal{U}(z, \lambda)$$

sia una rappresentazione unitaria di H_n per mezzo di W . Tale rappresentazione è una rappresentazione delle regole di Weyl nella forma (\bullet) (si ricordi che nella definizione dell'operatore di von Neumann intervengono gli stessi operatori di Weyl).

Citiamo ora il risultato di unicità annunciato.

Teorema 1.3.2 *(von Neumann) Ogni rappresentazione delle relazioni di Weyl su \mathbb{C}^n è somma diretta di copie della rappresentazione di Schroedinger.*

In particolare ogni rappresentazione unitaria irriducibile delle relazioni di Weyl su \mathbb{C}^n è unitariamente equivalente alla rappresentazione di Schroedinger.

E' possibile generalizzare la teoria svolta finora sostituendo al gruppo di Heisenberg H_n un generico gruppo localmente compatto commutativo G , e scrivendo per esso delle

relazioni di Weyl. In tal caso vale ancora un risultato di unicit  per la rappresentazione associata.

Si noti tuttavia che l'unicit    propria del caso di dimensione finita. Infatti   possibile definire un gruppo di Heisenberg generico:

$$H_X := X \rtimes \mathbb{R}$$

dove X   uno spazio vettoriale topologico di dimensione infinita, e definire ancora delle relazioni di Weyl per esso. In tal caso per  non vale pi  nessun risultato di unicit  (ricordiamo che H_X   localmente compatto se e solo se $\dim H_X < \infty$). Vedremo esplicitamente questo caso quando tratteremo la rappresentazione di Fock.

Osserviamo che il gruppo di Heisenberg H_n   connesso e semplicemente connesso, dunque tramite il Teorema di Nelson possiamo studiare le sue rappresentazione a partire da quelle della sua algebra di Lie.

  possibile ridimostrare il Teorema di completa riducibilit  senza fare uso della teoria di Nelson. Vale infatti il seguente:

Teorema 1.3.3 (di unicit  di Dirac-Dixmier) *Se $\{q_k, p_k\}$   una rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg per mezzo di operatori hermitiani su un dominio comune denso e invariante \mathcal{D} , e se $A_0 = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (p_k^2 + q_k^2)$   essenzialmente autoaggiunto su \mathcal{D} , allora la rappresentazione   somma diretta di copie della rappresentazione di Schroedinger.*

Si noti che l'operatore $A_0 = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (p_k^2 + q_k^2)$   l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico (posto $m = \hbar = m\omega = 1$). Dunque ogni rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili, unitariamente equivalenti alla rappresentazione di Schroedinger.

L'applicabilit  del Teorema precedente   tuttavia subordinata al supporre l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico essenzialmente autoaggiunta. Questo   il caso ad esempio della rappresentazione di Schroedinger $\{q, p\}$ che opera sullo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, ds)$. Il dominio \mathcal{D} pu  essere scelto in questo caso come:

$$\mathcal{D} = \bigcap_{h,k} \mathcal{D}_{p^h q^k}$$

Se con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indichiamo lo spazio di Schwartz, risulta:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \bigcap_{h,k} \mathcal{D}_{p^h q^k}$$

Quindi basta dimostrare che $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$   essenzialmente autoaggiunto su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ma si pu  far vedere che su tale spazio l'operatore $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ addirittura si diagonalizza mediante i polinomi di Hermite, e dunque   essenzialmente autoaggiunto.

1.3.2 Prodotti tensoriali e seconda quantizzazione

Nella teoria quantistica dei campi liberi si ha a che fare con sistemi composti da infinite particelle identiche indipendenti. La nozione che interviene nella formalizzazione dello spazio di Hilbert per pi  sistemi identici ed indipendenti   quella di prodotto tensoriale di spazi di Hilbert. Consideriamo due spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 e consideriamone il **prodotto tensoriale algebrico** $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ nel modo usuale. Questo prodotto tensoriale pu  essere reso uno spazio prehilbertiano definendo il prodotto:

$$(\sum_i x_i \otimes y_i, \sum_i x'_i \otimes y'_i) := \sum_{i,j} (x_i, x'_j)_{\mathcal{H}_1} (y_i, y'_j)_{\mathcal{H}_2}$$

Il **prodotto tensoriale hilbertiano** $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$   definito semplicemente come il completamento di $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ rispetto a questo prodotto. In seguito, per un abuso di

notazione, indicheremo il prodotto tensoriale hilbertiano con lo stesso simbolo \otimes di quello algebrico, lasciando inteso che esso contenga anche le relative informazioni topologiche.

Il prodotto tensoriale hilbertiano gode della proprietà distributiva:

$$H \otimes (M \oplus N) = (H \otimes M) \oplus (H \otimes N)$$

e più in generale:

$$H \otimes \left(\bigoplus_{\alpha} N_{\alpha} \right) = \bigoplus_{\alpha} H \otimes N_{\alpha}$$

Se \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 sono spazi di Hilbert ed $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, allora definiamo il prodotto tensoriale degli elementi A e B, $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$, come:

$$A \otimes B(x \otimes y) := Ax \otimes By$$

dove $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$. Per la norma si ha:

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$$

Esistono le seguenti immersioni isometriche:

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

$$A \longmapsto A \otimes I$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

$$B \longmapsto I \otimes B$$

e sussiste il seguente importante risultato (dovuto a Murray e von Neumann):

$$(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes I)' = I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$$

$$(I \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2))' = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes I$$

Il prodotto tensoriale appena definito entra in gioco nel caso in cui abbiamo a che fare con sistemi quantistici indipendenti. Se un sistema è identificato con l'algebra dei suoi osservabili \mathcal{A} , un suo sottosistema è rappresentato da una sottoalgebra \mathcal{A}_1 dell'algebra totale \mathcal{A} , tale che le unità delle due algebre coincidono. Due sottosistemi \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 di \mathcal{A} sono detti **indipendenti** se l'algebra del sistema completo è isomorfa al prodotto tensoriale $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

La situazione è più complicata per gli stati. Uno stato del sistema completo può essere ristretto ad un sottosistema, restringendo i valori di aspettazione. Viceversa, uno stato di un sottosistema può essere esteso ad uno stato su tutta l'algebra grazie al Teorema di Hahn-Banach, ma l'estensione in generale *non è unica*. In caso di un sistema che consiste di due sottosistemi indipendenti, uno stato sul sistema completo è definito da:

$$\omega_1 \otimes \omega_2(A_1 \otimes A_2) := \omega_1(A_1)\omega_2(A_2)$$

Combinazioni convesse di tali stati sono dette **separabili**. Nelle algebre non commutative esistono anche stati **non separabili**, legati a fenomeni come l'*entanglement* e importanti nelle applicazioni della Quantum Information.

Supponiamo di avere due sistemi quantistici indipendenti S_1 ed S_2 . In tal caso siano Q_1 e Q_2 due questioni, e ω_1, ω_2 due stati relativi ad S_1 e ad S_2 rispettivamente. Come sappiamo $\omega_j(Q_j)$ esprime la probabilità di trovare la proprietà Q_j nello stato ω_j . Ad esempio nel caso di stati vettoriali si ha:

$$\omega_1(Q_1) = (\psi_1, Q_1\psi_1)$$

$$\omega_2(Q_2) = (\psi_2, Q_2\psi_2)$$

dove ψ_1, ψ_2 sono i vettori che inducono gli stati ω_1, ω_2 rispettivamente. Nel seguito supporremo sempre stati puri.

La probabilità che nel sistema congiunto formato da S_1 ed S_2 siano simultaneamente verificate le proprietà Q_1 e Q_2 nei rispettivi stati é:

$$\omega_1(Q_1)\omega_2(Q_2) = (\psi_1, Q_1\psi_1)(\psi_2, Q_2\psi_2)$$

Questo é il caso in cui i due sistemi sono completamente indipendenti l'uno dall'altro: in questo caso si dice che si ha **indipendenza statistica**. Gli stati del sistema congiunto composto da S_1 ed S_2 sono descritti da vettori del tipo $\psi_1 \otimes \psi_2$ appartenenti al prodotto tensoriale dei due spazi $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Dunque l'indipendenza statistica si esprime come:

$$\omega_1 \otimes \omega_2(Q_1 Q_2) = (\psi_1 \otimes \psi_2, (Q_1 \otimes Q_2)\psi_1 \otimes \psi_2) = (\psi_1, Q_1 \psi_1)(\psi_2, Q_2 \psi_2) = \omega(Q_1)\omega(Q_2)$$

dove con $\omega_1 \otimes \omega_2$ abbiamo indicato lo stato vettoriale indotto dal vettore $\psi_1 \otimes \psi_2$. Infine se abbiamo a che fare con algebre di von Neumann, poiché in questo caso i proiettori sono densi il discorso vale per ogni operatore.

Se H_1 ed H_2 sono le rispettive hamiltoniane (energie), i due sistemi evolvono nel tempo come:

$$U_1 = e^{iH_1 t}$$

$$U_2 = e^{iH_2 t}$$

Per il sistema congiunto si ha:

$$U(t)(\psi_1 \otimes \psi_2) \equiv U_1(t)\psi_1 \otimes U_2(t)\psi_2$$

ossia:

$$U(t) \equiv U_1(t) \otimes U_2(t) = e^{iH_1 t} \otimes e^{iH_2 t}$$

Per il Teorema di Stone il generatore di questo gruppo é:

$$H = \frac{1}{i} \left(\frac{d}{dt} U(t) \right)_{t=0} = H_1 \otimes I + I \otimes H_2$$

Dunque:

$$U(t) = e^{it(H_1 \otimes I + I \otimes H_2)}$$

Se i due sistemi interagiscono lo spazio di Hilbert é ancora $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, ma l'hamiltoniana contiene un termine di interazione:

$$H = H_1 \otimes I + I \otimes H_2 + V$$

L'evoluzione temporale é una maniera di intervenire sul sistema quantistico che viene dall'equazione di Schroedinger.

L'altro modo con cui si puó intervenire su un sistema quantistico é mediante la misurazione di un osservabile: come vedremo anche qui interviene il formalismo tensoriale.

Consideriamo una proposizione, cioé un proiettore $E \in \mathcal{A}$. Come sappiamo, $\omega(E)$ ha il significato di probabilitá di trovare la proprietá E nello stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, mentre $\omega(I - E)$ rappresenta la probabilitá che in ω la proprietá E *non* sia verificata. Dopo la misurazione, uno stato puro diventa in generale un miscuglio statistico:

$$\omega' = \omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_0$$

Si noti che ω' non é una sovrapposizione. Per determinare gli stati ω_1, ω_0 , consideriamo la seguente decomposizione fatta tramite un autoaggiunto A dell'algebra degli osservabili:

$$\begin{pmatrix} EAE & (I - E)AE \\ EA(I - E) & (I - E)A(I - E) \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A \longmapsto EAE + (I - E)A(I - E)$$

dunque:

$$\omega'(A) = \omega(EAE) + \omega((I - E)A(I - E))$$

quindi deve essere:

$$\omega' = \frac{\omega(EAE)}{\omega(E)} + \frac{\omega((I - E)A(I - E))}{\omega(I - E)}$$

ovvero:

$$\omega_1(A) = \frac{\omega(EAE)}{\omega(E)}$$

$$\omega_0(A) = \frac{\omega((I - E)A(I - E))}{\omega(I - E)}$$

L'evoluzione temporale e il processo di misura descrivono trasformazioni radicalmente diverse sugli stati. Infatti, se consideriamo:

$$\alpha_t(A) = e^{iHt} A e^{-iHt}$$

abbiamo che un'evoluzione temporale:

$$\omega \longmapsto \omega \circ \alpha_t$$

porta stati puri in stati puri, mentre un processo di misura:

$$\omega \longmapsto \omega' = \omega(E)\omega_1 + \omega(I - E)\omega_0$$

porta stati puri in miscugli statistici.

Un collegamento tra le due descrizioni é stato investigato a fondo da von Neumann, facendo uso proprio della nozione di prodotto tensoriale; von Neumann ha proposto infatti che bisogna considerare l'apparato di misura come sistema fisico accoppiato al sistema da osservare: la misurazione consiste proprio in una interazione tra questi due sistemi. Il nostro spazio di Hilbert é dunque:

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$$

dove \mathcal{H}_S é lo spazio di Hilbert del sistema in esame, e \mathcal{H}_M é quello dell'apparato di misura. Supponiamo che, prima della misurazione, il sistema si trovi nello stato ψ_S e l'apparato di misura in ψ_M , sicché il sistema congiunto é in $\psi_S \otimes \psi_M$. Supponiamo che la misurazione consista in un'interazione di lunghezza T . Se allora $t = 0$ é l'istante iniziale l'evoluzione temporale al tempo $t = T$ é data dall'operatore unitario:

$$U(T) = e^{iHT}$$

Questo operatore trasforma $\psi_S \otimes \psi_M$ in un nuovo stato:

$$U(\psi_S \otimes \psi_M) = e^{iHT}(\psi_S \otimes \psi_M) = \begin{cases} \psi_S \otimes \psi_{M_1} & \text{se } E\psi_S = \psi_S \\ \psi_S \otimes \psi_{M_0} & \text{se } E\psi_S = 0 \end{cases}$$

dove $(\psi_{M_0}, \psi_{M_1}) = 0$, $\|\psi_{M_i}\| = 1$. In generale il vettore di stato del sistema composto a $t = T$ é:

$$\psi(T) = e^{iHT}(\psi_S \otimes \psi_M) = E\psi_S \otimes \psi_{M_1} + (I - E)\psi_S \otimes \psi_{M_0}$$

Osserviamo ora che, in virtù delle immersioni isometriche citate in precedenza, per ogni stato di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ si può scrivere:

$$\omega(A) = \text{tr}(TA) = (\varphi, A \otimes I\varphi)$$

per un opportuno φ di norma 1, dunque ogni tale stato può essere visto come restrizione a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ di uno stato puro di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} (U(\psi_S \otimes \psi_M), (A \otimes I)U(\psi_S \otimes \psi_M)) &= (\psi(T), (A \otimes I)\psi(T)) = \\ &= \omega(EAE) + \omega((I - E)A(I - E)) = (E\psi, AE\psi) + ((I - E)\psi, A(I - E)\psi) = \\ &= \omega(E)(\psi_E, A\psi_E) + \omega(I - E)(\psi_E, A\psi_E) \end{aligned}$$

dove $\psi_E = E\psi/\|E\psi\|^{-1}$. Si noti che i termini non diagonali sono nulli in quanto $(\psi_{M_0}, \psi_{M_1}) = 0$. Lo stato puro é diventato un miscuglio statistico perché stiamo considerando anche l'apparato di misura come sistema fisico.

In ogni caso resta un'ambiguitá su come distinguere i due termini dell'ultima formula: fu von Neumann per primo a proporre la famosa teoria della coscienza dell'osservatore.

Per quanto riguarda spiegazioni di natura piú matematica, si possono citare i risultati di Hepp, che dimostrano come una separazione tra i due termini sia attribuibile anche ad un'evoluzione temporale, purché asintotica : questo approccio potrebbe dunque gettare un ponte tra la teoria della misurazione quantistica ed il formalismo di scattering (per una breve descrizione dell'approccio di Hepp vedi [Fred95]).

La teoria svolta finora si estende facilmente al caso di un numero finito di gradi di libertà, facendo intervenire il prodotto tensoriale di $n \in \mathbb{N}$ spazi di Hilbert. Resta il problema dell'estensione al caso di infiniti gradi di libertà.

L'estensione al caso infinito-dimensionale necessita della nozione di prodotto tensoriale di infiniti spazi di Hilbert, la cui definizione matematica corretta fa uso del procedimento di limite induttivo che andiamo ora a richiamare.

Un **sistema induttivo** (o **diretto**) di spazi vettoriali é dato assegnando una successione $\{X_n\}$ di spazi vettoriali ed una successione $f_{mn} : X_m \longrightarrow X_n$ di applicazioni lineari definite per $m \leq n$, in modo che:

- (1) $f_{nn} : X_n \longrightarrow X_n$ sia l'applicazione identica
- (2) se $m \leq n$ e $l \leq m$ allora $f_{ln} = f_{mn} \circ f_{lm}$

Partendo da un sistema induttivo possiamo costruire un nuovo spazio vettoriale:

$$X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

detto **limite induttivo** del sistema dato, nel modo seguente:

$$X = \frac{S}{T}$$

dove $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$ e T é il sottospazio di S generato dagli elementi della forma:

$$x_n - f_{mn}(x_m)$$

Dunque se X é una somma diretta di spazi $\{X_n\}$ nei quali gli elementi di indice abbastanza grande sono identificati tra loro.

Alcune proprietà del limite induttivo di spazi vettoriali sono le seguenti:

(1) ogni elemento $x \in X$ si scrive nella forma $f_n(x_n)$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ ed $x_n \in X_n$ (le applicazioni lineari $f_n : X_n \longrightarrow X$ sono definite come la composizione dell'inclusione $X_n \hookrightarrow S$ e della proiezione $S \rightarrow \frac{S}{T} = X$)

(2) sussiste il seguente isomorfismo:

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \otimes Y) = (\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n) \otimes Y$$

Ad esempio se consideriamo una successione $\{X_n\}$ di sottospazi di uno spazio vettoriale X fissato, tali che se $m \leq n$ allora $X_m \subseteq X_n$, allora la somma di tutti i sottospazi X_n (ovvero lo spazio da essi generato) é il limite induttivo della successione $\{X_n\}$ rispetto alle inclusioni $f_{mn} : X_m \hookrightarrow X_n$.

Ora facciamo un passo verso il formalismo quantistico andando a considerare spazi di Hilbert. In questo caso la definizione di limite induttivo fa uso di una successione standard di riferimento, che sará la successione dei vuoti di Fock. Consideriamo una successione $\{\mathcal{H}_n\}$ di spazi di Hilbert ed una successione $\{\Omega_n\}$ di elementi $\Omega_n \in \mathcal{H}_n$ con $\|\Omega_n\| = 1$. Se $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_m$, con $m \leq n$, possiamo definire le mappe $f_{mn} : X_m \longrightarrow X_n$ come:

$$f_{mn}(\psi) := \psi \otimes \Omega_{m+1} \otimes \dots \otimes \Omega_n$$

E' facile vedere che con queste mappe la successione $\{\mathcal{H}_n\}$ definisce un sistema diretto, del quale possiamo considerare il limite induttivo:

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$$

che é uno spazio prehilbertiano rispetto al prodotto scalare:

$$(\psi, \varphi) := (\psi \otimes \Omega_{n+1} \otimes \dots, \varphi \otimes \Omega_{m+1} \otimes \dots)$$

con $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$, $\varphi \in \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_m$, e del quale possiamo considerare il completamente:

$$\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$$

che é ancora uno spazio di Hilbert.

In una teoria di campo alla Wightman il senso matematico degli operatori di campo è quello di distribuzioni a valori operatori, cioè oggetti del tipo:

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^4} \phi(x) f(x) dx \quad (\boxtimes)$$

dove f è un'opportuna funzione test (ad esempio $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$).

Questa definizione rende conto del fatto, chiarito da Bohr-Rosenfeld in [BR50], che, a causa del principio di Heisenberg, non ha senso misurare esattamente il valore di un campo quantistico (ad esempio il campo elettromagnetico) in un punto dello spazio-tempo: il valore $\phi(x)$ di un campo ϕ in un punto x non è ben definito, dunque il campo ϕ non esiste come funzione ma soltanto come distribuzione, e la (\boxtimes) può essere interpretata come una media spazio-temporale dell'ipotetico $\phi(x)$ tramite la funzione test f (*smearred field*). In altre parole ciò che realmente viene misurato sono i valori esatti del campo nei punti dello spazio-tempo, ma medie delle grandezze su volumi finiti, con frontiera sufficientemente regolare: la scelta di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ come spazio delle funzioni test non è necessaria, essendo possibili altri casi.

Come vedremo, le formulazioni (\diamond) e (\boxtimes) non sono completamente scollegate: è possibile definire campi di Segal sullo spazio di Fock che soddisfano gli assiomi di Garding-Wightman (ad esempio nel caso del campo libero scalare hermitiano).

In conclusione, se nella "prima" quantizzazione (quella relativa a un numero finito di gradi di libertà) abbiamo quantizzato gli osservabili come operatori su uno spazio di Hilbert, nella "seconda" quantizzazione (il caso della Meccanica Quantistica di infinite particelle identiche) quantizzeremo le funzioni d'onda come operatori sullo spazio di Fock.

Citiamo anche un'ulteriore procedura; sappiamo che le componenti della posizione, cioè le coordinate dello spazio-tempo, costituiscono un esempio di sistema completo di osservabili compatibili:

$$[X_i, X_j] = 0, \quad \forall i, j$$

L'approccio introdotto nel '95 in [DFR95] consiste nel far cadere questa assunzione: in questo senso, può essere interpretato come una "terza" quantizzazione, in quanto ad essere quantizzati (resi non commutativi) sono gli elementi stessi dello spazio-tempo.

Indaghiamo ora più da vicino i dettagli matematici di quanto introdotto finora, in particolare la non canonicità della teoria, propria del caso infinito-dimensionale. Ricordiamo che facendo uso dell'operatore di von Neumann:

$$W(z) := e^{\frac{i}{2}\alpha\beta} U(\alpha) V(\beta)$$

le relazioni di commutazione di Weyl si riscrivono nella forma:

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z,z')} W(z+z')$$

dove $\sigma(z, z') = -\frac{1}{2}\mathbb{I}m \langle z, z' \rangle$ è una forma symplettica fortemente non degenera.

Ora, nel caso di infiniti gradi di libertà, le variabili z, z' non variano più in \mathbb{C} ma in uno spazio vettoriale topologico X di dimensione infinita. Come abbiamo già osservato possiamo ancora considerare il gruppo di Heisenberg:

$$H_X := X \rtimes \mathbb{R}$$

degli elementi $(z, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$, col prodotto:

$$(z, \lambda)(z', \lambda') = (z+z', \lambda+\lambda'+\sigma(z, z'))$$

Il gruppo H_X è localmente compatto se e solo se $\dim H_X < \infty$. Dunque la teoria precedente, vista nell'ottica dei gruppi topologici, non è più valida, in quanto essa dipendeva in particolare dall'integrale di Haar, il quale esiste se e solo se nel caso localmente compatto. Lo strumento che si usa invece in questo caso è essenzialmente un Teorema, che di seguito vogliamo richiamare.

Ricordiamo che una funzione $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$, dove G é un gruppo, si dice **di tipo positivo** se $\varphi(e) = 1$, e per ogni $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ a supporto finito si ha:

$$\sum_{g,h \in G} \overline{f(g)} f(h) \varphi(g^{-1}h) \geq 0$$

Se G é un gruppo topologico qualsiasi e U una sua rappresentazione (fortemente continua) che possiede un vettore ciclico ξ , allora la funzione:

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

é una funzione (continua) di tipo positivo.

Vale anche il viceversa.

Teorema 1.3.4 *φ é una funzione continua di tipo positivo su G se e solo se esiste una rappresentazione unitaria $U : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tale che:*

$$\varphi(g) = (\xi, U(g)\xi)$$

dove ξ é un vettore ciclico per U , con $\|\xi\| = 1$. Inoltre φ é continua se e solo se U é fortemente continua.

Per determinare la nostra rappresentazione delle regole di Weyl non ci resta che cercare funzioni di tipo positivo sul gruppo di Heisenberg H_X . Consideriamo la funzione $\omega_F : H_X \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$\omega_F(z, \lambda) := e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}\|z\|^2}$$

Puó vedersi che ω_F é una funzione di tipo positivo, e continua nella topologia di H_X , ovvero la topologia prodotto di quella di \mathbb{R} e della topologia di X come spazio vettoriale topologico indotta dalla seminorma $\|\cdot\|$. Dunque esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua \mathcal{U} associata alla funzione ω_F che é detta **rappresentazione di Fock**. Esplicitamente una tale rappresentazione é data da:

$$\mathcal{U}(z, \lambda) = e^{i\lambda} W(z)$$

che, come sappiamo, é una rappresentazione unitaria del gruppo di Heisenberg. Dunque nel caso della rappresentazione di Fock si ha:

$$\omega_F(z) = e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}\|z\|^2} = (\Omega_F, \mathcal{U}(z, \lambda)\Omega_F)$$

dove Ω_F é un vettore ciclico per $\mathcal{U}(z, \lambda)$ chiamato **vuoto di Fock**. In altre parole l'insieme $\{\mathcal{U}(z, \lambda)\Omega_F : (z, \lambda) \in H_X\}$ é totale. In particolare per $\mathcal{U}(z, \lambda) = W(z)$ si ha:

$$(\Omega_F, W(z)\Omega_F) = e^{-\frac{1}{4}\|z\|^2}$$

Se consideriamo il gruppo di Heisenberg finito-dimensionale:

$$H_n = \mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$$

allora la funzione $\omega_F(z, \lambda) := e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}\|z\|^2}$ é ancora una funzione continua di tipo positivo, e si ha ancora:

$$(\Omega_F, \mathcal{U}(z, \lambda)\Omega_F) = e^{i\lambda} e^{-\frac{1}{4}\|z\|^2}$$

In questo caso la rappresentazione di Fock coincide con la rappresentazione di Schroedinger (per l'unicita). Non solo, se inoltre pensiamo ad ω_F come ad uno stato vettoriale indotto dal vuoto di Fock Ω_F (si ricordi che essendo di tipo positivo $\omega_F(e) = 1$) su un'opportuna C^* -algebra generata associata, allora la rappresentazione che si ottiene é proprio la rappresentazione GNS. Inoltre si ha che \mathcal{U} é irriducibile se e solo se ω_F é estrema, cioé é uno stato puro. Sfruttando questi fatti si puó dimostrare che la rappresentazione di Fock é una rappresentazione irriducibile. Dunque con la rappresentazione di Fock abbiamo determinato una rappresentazione irriducibile fortemente continua delle relazioni di Weyl.

Vediamo ora che possiamo sostituire il generico spazio X con lo spazio di Hilbert uniparticella. Consideriamo $\mathcal{H} = \tilde{X}$ il completamento di X . La mappa:

$$x \in \mathcal{H} \mapsto W(x)$$

é fortemente continua per ogni $x \in \mathcal{H}$. La forte continuitá di W implica, per ogni $x \in \mathcal{H}$ e per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ convergente ad x si ha:

$$W(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W(x)$$

Ma per la forte continuitá $\{W(x)\}_{x \in X} \cdot \omega_F$ é un sottospazio la cui chiusura é una rappresentazione ciclica delle relazioni di Weyl:

$$\overline{\{W(x)\}_{x \in X} \cdot \omega_F} = \overline{\{\text{sottospazio vettoriale generato da } W(x)\}_{x \in \mathcal{H}} \cdot \omega_F}$$

Dunque possiamo considerare \mathcal{H} al posto di X (si ricordi che lo spazio di Hilbert uniparticella é necessariamente infinito-dimensionale).

Ora vogliamo discutere la covarianza della rappresentazione di Fock per $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. In altre parole vogliamo mostrare che esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua:

$$U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \mapsto \Gamma(U) \in \mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$$

tale che:

$$W(Ux) = \Gamma(U)W(x)\Gamma(U)^{-1}$$

Sappiamo che:

$$(\Omega_F, W(x)\Omega_F) = e^{-\frac{1}{4}\|x\|^2}$$

dove Ω_F é il vuoto di Fock. Se consideriamo un operatore unitario $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ allora si ha:

$$e^{-\frac{1}{4}\|x\|^2} = e^{-\frac{1}{4}\|Ux\|^2}$$

Definiamo pertanto $\Gamma(U)$ come:

$$\Gamma(U)W(x)\Omega_F := W(Ux)\Omega_F$$

In particolare:

$$\Gamma(U)\Omega_F = \Omega_F$$

Ragionando sul sottospazio denso di \mathcal{H} é facile vedere che la definizione é ben posta, e che effettivamente $U \mapsto \Gamma(U)$ é una rappresentazione ($\Gamma(U)\Gamma(U') = \Gamma(UU')$) unitaria fortemente continua da $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ in $\mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$ che soddisfa le proprietá richieste.

In definitiva Γ manda lo spazio di Hilbert uniparticella nello spazio di Fock $\Gamma(\mathcal{H})$, e trasforma gli operatori unitari di \mathcal{H} negli operatori unitari di $\Gamma(\mathcal{H})$, e dunque puó essere visto come un funtore dalla categoria che ha come oggetti gli spazi di Hilbert e come frecce gli operatori unitari, in sé stessa. Per questa ragione Γ é chiamato anche **funtore di seconda quantizzazione**. Il funtore Γ puó essere visto in un certo senso come “esponenziale” dello spazio di Hilbert uniparticella:

$$\Gamma(\mathcal{H}) \sim "e^{\mathcal{H}}"$$

in quanto esso gode della seguente proprietá:

$$\Gamma(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = \Gamma(\mathcal{H}_1) \otimes \Gamma(\mathcal{H}_2)$$

e, piú in generale:

$$\Gamma(\bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}) = \bigotimes_{\alpha}^{\{\Omega_F^{(n)}\}} \Gamma(\mathcal{H}_{\alpha})$$

dove $\{\Omega_F^{(n)}\}$ é la successione di riferimento, che sará la successione dei vuoti di Fock.

Sappiamo che la funzione $x \mapsto W(x)$, $x \in \mathcal{H}$, é fortemente continua. Se richiediamo che, per ogni fissato $x \in \mathcal{H}$, la funzione:

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto W(\lambda x)$$

sia fortemente continua, possiamo applicare il Teorema di Stone per avere che:

$$W(\lambda x) = e^{i\lambda\phi(x)}$$

con $\phi(x)$ operatore autoaggiunto, ed in particolare:

$$W(x) = e^{i\phi(x)}$$

L'operatore autoaggiunto $\phi(x)$ é detto **campo di Segal**.

Facciamo alcuni esempi di rappresentazione di Fock.

(1) Sia $\mathcal{H} = \mathbb{C}$. Allora:

$$\Gamma(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}, ds)$$

e:

$$\phi(z) = \alpha q + \beta p$$

dove $z = \alpha + i\beta$, e q, p sono gli operatori della rappresentazione di Schroedinger, per

cui si ha:

$$W(z) = e^{i(\alpha q + \beta p)}$$

(2) Se $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ allora, in virtú della proprietá esponenziale di Γ si ha:

$$\Gamma(\mathbb{C}^n) = \bigotimes_{i=1, n} \Gamma(\mathbb{C}) = \bigotimes_{i=1, n} L^2(\mathbb{R}, ds)$$

Inoltre, se $z = \alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$\phi(z) = (\alpha, q) + (\beta, p)$$

e dunque:

$$W(z) = e^{i((\alpha, q) + (\beta, p))}$$

(3) Supponiamo che \mathcal{H} sia uno spazio di Hilbert separabile con base ortonormale $\{e_n\}$.

Allora:

$$\mathcal{H} \cong \ell(\mathbb{N}) \cong \bigoplus_{n=1, \infty} e_n \mathbb{C}$$

Quindi lo spazio di Fock sará:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{i=1, \infty}^{\{\Omega_F\}} L^2(\mathbb{R}, ds)$$

dove $\Omega_F = \Omega_0$ é lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico (vuoto), e:

$$W(x) = \bigotimes_{n=1, \infty} e^{i(\alpha_n q + \beta_n p)}$$

dove $\alpha_n + i\beta_n = (x, e_n)$. In altre parole se \mathcal{H} é separabile $\Gamma(\mathcal{H})$ descrive vettori di stato per un'assemblea numerabile di oscillatori armonici.

Poiché in Meccanica Quantistica \mathcal{H} é uno spazio di Hilbert complesso vale una decomposizione:

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} + i\mathcal{K}$$

dove \mathcal{K} é uno spazio di Hilbert reale, ed ogni vettore $x \in \mathcal{H}$ si puó scrivere dunque come $x = \xi + i\eta$, con $\xi, \eta \in \mathcal{K}$. Se $x \in \mathcal{K}$ allora definiamo il **campo libero canonico** su \mathcal{H} come la mappa $x \mapsto \varphi(x) := \phi(x)$, ed il **momento canonico coniugato** come $x \mapsto \pi(x) := \phi(ix)$. Questa definizione dipende dalla scelta della decomposizione, ovvero dalla particolare coniugazione che stiamo considerando sullo spazio di Hilbert. Si noti che la scelta dei nomi (che apparrá piú chiara in seguito) ricalca lo schema hamiltoniano della Meccanica Classica, ma il momento canonico coniugato non va confuso con l'operatore impulso P .

Nel caso finito-dimensionale le relazioni di Weyl si scrivono:

$$W(z)W(z') = e^{i\sigma(z, z')}W(z + z')$$

dove $z = \alpha + i\beta$, $z' = \alpha' + i\beta'$ con $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}^n$, e $\sigma(z, z') = -\frac{1}{2}Im \langle z, z' \rangle$. Esse implicano subito le regole di commutazione per i campi (basta sostituire $W(z) = e^{i\phi(z)}$):

$$[\phi(z), \phi(z')] = \phi(z)\phi(z') - \phi(z')\phi(z) \subseteq 2i\sigma(z, z') \cdot I = -iIm \langle z, z' \rangle$$

Poiché queste relazioni valgono per qualsiasi sottospazio di \mathcal{H} di dimensione finita n arbitraria, per la forte continuitá di W, la loro validitá si estende anche al caso di dimensione infinita.

Vogliamo ora tornare a vedere che relazione c'è tra gli operatori di campo e gli operatori di creazione/distruzione. Ricordiamo che nella trattazione "classica" dell'oscillatore armonico quantistico unidimensionale gli operatori di distruzione e di creazione sono dati rispettivamente da:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq)$$

$$\eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq)$$

Questi operatori, applicati allo stato fondamentale dell'oscillatore armonico (il vuoto) hanno l'effetto di produrre tutti gli stati eccitati. In particolare, sul vuoto si ha:

$$\eta\Omega_F = 0$$

ovvero gli operatori di distruzione uccidono il vuoto.

Vogliamo dare una definizione analoga nel caso di infiniti gradi di libertà. Osserviamo a tale scopo che, nel caso 1-dimensionale, essendo $\phi(z) = \alpha q + \beta p$, si ha:

$$q = \phi(1)$$

$$p = \phi(i)$$

per cui andiamo a definire piú in generale gli operatori di distruzione come:

$$a(z) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi(iz) - i\phi(z))$$

Osservando che $z \mapsto a(z)$ é antilineare possiamo scrivere:

$$a(iz) := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\phi(z) - i\phi(iz)) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\phi(iz) - i\phi(z)) = -ia(z)$$

da cui dovrá essere:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi(iz) + i\phi(z)) \subseteq a^*(z)$$

Quanto visto vale se $z \in \mathbb{C}^n$, cioé per ogni dimensione finita n , mentre in dimensione infinita bisognerà prendere le opportune estensioni. In definitiva gli operatori di creazione/distruzione in infiniti gradi di libertà sono dati da:

$$a(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi(ix) - i\phi(x))^-$$

$$a^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi(ix) + i\phi(x))^-$$

dove in entrambi i casi $x \in \mathcal{H}$. Osserviamo che mentre a é l'antilinearizzazione di ϕ , a^* ne é la linearizzazione.

Per gli operatori a, a^* valgono le seguenti **regole canoniche di commutazione** (CCR):

$$[a(x), a(y)] = 0$$

$$[a^*(x), a^*(y)] = 0$$

$$[a(x), a^*(y)] \subseteq (x, y) \cdot \mathbf{I}$$

Si può dimostrare che nel caso 1-dimensionale lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico é un vettore analitico, che gli stati eccitati si ottengono applicando ad esso gli operatori di creazione/distruzione (dunque in definitiva polinomi in p, q), e costituiscono una base di L^2 . Questo sará valido anche nel caso generale, ed in particolare sul vuoto si ha, per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$a(x)\Omega_F = 0$$

Diciamo qualcosa sul dominio di definizione di ϕ, a, a^* . Innanzitutto osserviamo che il vuoto Ω_F sará nell'intersezione di tutti questi domini. In realtà é possibile dimostrare che ϕ, a, a^* ammettono un dominio comune denso di vettori analitici, della forma:

$$\{\text{poli}(\phi(x), x \in \mathcal{H})\Omega_F\} = \mathcal{D}$$

Infatti poiché il vuoto Ω_F é un vettore ciclico per la rappresentazione di Fock, l'insieme:

$$\{W(x)\Omega_F\}_{x \in \mathcal{H}} \subseteq \mathcal{D}$$

é totale, ed i suoi elementi hanno la forma:

$$W(x)\Omega_F = e^{i\phi(x)}\Omega_F = \sum_{n=0,\infty} \frac{i^n}{n!} \phi(x)^n \Omega_F$$

dove abbiamo usato il Teorema di Stone e l'analiticit  di Ω_F . Inoltre si pu  vedere che l'insieme:

$$\{\prod_i a^\sharp(x_i)\Omega_F\}_{\{x_i\} \in \{\text{sottoinsiemi finiti di } \mathcal{H}\}}$$

dove a^\sharp rappresenta indifferentemente a oppure a^* ,   totale.

Poich  gli operatori di distruzione uccidono il vuoto,   possibile eliminarli nelle formule riducendosi a considerare stringhe del tipo:

$$a^*(x_1)a^*(x_2) \cdot \dots \cdot a^*(x_n)\Omega_F$$

Qualsiasi funzione d'onda ad n particelle si pu  scrivere in questa forma; inoltre ogni elemento di questo tipo   un vettore analitico intero per $\phi(x)$.

Per introdurre una descrizione equivalente dello spazio di Fock   necessario introdurre il principio della *simmetria per permutazioni*, che andiamo a delineare.

In generale, se G   un gruppo finito e $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una sua rappresentazione unitaria, allora vale il seguente Teorema "ergodico" elementare:

$$E_0 = E_{\{x \in \mathcal{H} : U(g)x = x, \forall g \in G\}} = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} U(g)$$

Nel caso del gruppo delle permutazioni di n elementi, o gruppo simmetrico $\mathbb{P}(n)$ (gruppo finito di ordine $n!$) si ottiene il **simmetrizzatore**:

$$S := \frac{1}{n!} \sum_{p \in \mathbb{P}(n)} U(p)$$

Lo spazio di Hilbert:

$$S^n \mathcal{H} := S(\mathcal{H}^{\otimes n}) = \mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes_S \dots \otimes_S \mathcal{H}$$

  detto **n-ma potenza tensoriale simmetrica** di \mathcal{H} .

Consideriamo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$, ed associamo a questa n-pla l'elemento:

$$\frac{1}{n!} a^*(x_1) \cdot \dots \cdot a^*(x_n) \Omega_F \in \mathcal{H}^{\otimes n} \equiv \Gamma_n(\mathcal{H})$$

e l'elemento simmetrizzato:

$$S(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \in \mathcal{H}^{\otimes n}$$

Ora enunciamo il seguente risultato:

Lemma 1.3.5 $(a^*(x_1) \cdot \dots \cdot a^*(x_m) \Omega_F, a^*(x'_1) \cdot \dots \cdot a^*(x'_n) \Omega_F) =$
 $= \delta_{nm} \sum_{p \in \mathbb{P}(n)} (x_1 \otimes \dots \otimes x_m, U(p)x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n)$
 dove $\mathbb{P}(n)$   il gruppo simmetrico su n elementi, e:
 $U(p)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) := (x_{p^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{p^{-1}(n)})$
   la rappresentazione unitaria di $\mathcal{H}^{\otimes n}$ data dall'azione di $\mathbb{P}(n)$.

Per il Lemma, per ogni n esiste un operatore unitario:

$$V_n : \Gamma_n(\mathcal{H}) \longrightarrow S^n \mathcal{H}$$

tale che:

$$V_n \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} a^*(x_1) \cdot \dots \cdot a^*(x_n) \Omega_F \right) = S(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$$

e:

$$\frac{1}{n!} (V_m(x), V_n(x')) = \delta_{nm} (S(x_1 \otimes \dots \otimes x_m), S(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n))$$

Dunque su tutto lo spazio resta definito un operatore:

$$V : \Gamma(\mathcal{H}) \longrightarrow \bigoplus_{n=0,\infty} S^n \mathcal{H}$$

per cui:

$$\Gamma(\mathcal{H}) \cong \bigoplus_{n=0,\infty} \Gamma_n(\mathcal{H})$$

dove, per ogni n , abbiamo l' n -ma potenza simmetrica:

$$\Gamma_n(\mathcal{H}) \cong S^n \mathcal{H}$$

In definitiva si ottiene una caratterizzazione dello spazio di Fock come l'algebra dei tensori simmetrici sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} :

$$\Gamma(\mathcal{H}) \equiv \Gamma_+(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0, \infty} S^n \mathcal{H}$$

In questo contesto per gli operatori di creazione/distruzione valgono delle formule del tipo:

$$V a^*(x) V^{-1}(x_1 \otimes_S \dots \otimes_S x_n) := \sqrt{n+1}(x \otimes_S x_1 \otimes_S \dots \otimes_S x_n)$$

$$V a(x) V^{-1}(x_1 \otimes_S \dots \otimes_S x_n) := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_j (x, x_j) (x_1 \otimes_S \dots \otimes_S \hat{x}_j \otimes_S \dots \otimes_S x_n)$$

dove col simbolo $\hat{}$ indichiamo che il corrispondente elemento é omesso.

Il vuoto di Fock é il vettore:

$$\Omega_F := 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$$

ed i **campi di Segal** si definiscono come:

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(x) + a(x))$$

La necessità di introdurre potenze tensoriali simmetrizzate riflette il fatto che abbiamo a che fare con particelle indistinguibili, per cui gli stati sono invarianti per permutazioni qualsiasi degli elementi. Stati di questo tipo si riferiscono a **particelle bosoniche** o **bosoni**, e lo spazio $\Gamma_+(\mathcal{H})$ nella versione simmetrica é detto **spazio di Fock bosonico**. Le particelle bosoniche obbediscono alla cosiddetta **statistica di Bose-Einstein**.

In natura sono osservate anche particelle che obbediscono ad un differente tipo di statistica, detta **statistica di Fermi-Dirac**. Questo tipo di statistica serve ad implementare il principio di esclusione di Pauli (o meglio il Teorema di connessione spin/statistica): in ogni stato siffatto puó esserci soltanto una particella. Particelle di questo tipo si dicono **fermioni**. Dal punto di vista formale questo corrisponde ad un'altra versione dello spazio di Fock visto come spazio di Hilbert totalmente antisimmetrizzato:

$$\Gamma_-(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0, \infty} A(\mathcal{H}^{\otimes n}) = \bigoplus_{n=0, \infty} \mathcal{H}^{\otimes A n} = \bigoplus_{n=0, \infty} \mathcal{H} \otimes_A \dots \otimes_A \mathcal{H}$$

dove A é l'antisimmetrizzatore, definito come:

$$A := \frac{1}{n!} \sum_{p \in \mathbb{P}(n)} \text{sign}(p) \epsilon^{(n)} p$$

dove:

$$\epsilon^{(n)} p(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) := x_{p^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{p^{-1}(n)}$$

e:

$$\text{sign}(p) := (-1)^{\text{numero di trasposizioni di } p}$$

Gli operatori di creazione/distruzione in questo caso si scrivono:

$$a^*(x)(x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_n) := \sqrt{n+1}(x \otimes_A x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_n)$$

$$a(x)(x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j (-1)^{j+1} (x, x_j) (x_1 \otimes_A \dots \otimes_A \hat{x}_j \otimes_A \dots \otimes_A x_n)$$

dove col simbolo $\hat{}$ indichiamo che il j -mo elemento é omesso.

Una volta introdotto l' **anticommutatore**:

$$[A, B]_+ := AB + BA$$

si possono scrivere le **regole canoniche di anticommutazione** (CAR) per gli operatori di creazione/distruzione fermionici:

$$[a(x), a(y)]_+ = 0$$

$$[a^*(x), a^*(y)]_+ = 0$$

$$[a(x), a^*(y)]_+ \subseteq (x, y) \cdot \mathbf{I}$$

In particolare:

$$[a(x), a^*(x)]_+ = a(x)a^*(x) + a^*(x)a(x) \subseteq \|x\|^2 \cdot \mathbf{I}$$

In questo caso a, a^* sono operatori limitati, infatti:

$$\|a(x)\phi\|^2 = (\phi, a^*(x)a(x)\phi) \leq \|a(x)\phi\|^2 + \|a^*(x)\phi\|^2 = \|x\|^2\|\phi\|^2$$

(analogamente per a^*), pertanto:

$$\|a(x)\| = \|a^*(x)\| = \|x\|$$

in contrasto col caso bosonico in cui a, a^* non sono limitati. In modo analogo si definiscono gli operatori di campo e le relative regole di anticommutazione.

Osserviamo infine che é possibile scomporre lo spazio di Hilbert della teoria in una parte simmetrica ed antisimmetrica:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

e compattare la notazione per entrambi i funtori Γ_+ (bosonico) e Γ_- (fermionico) nel modo seguente:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \Gamma_+(\mathcal{H}_+) \otimes \Gamma_-(\mathcal{H}_-)$$

Consideriamo ora una versione "infinitesimale" del funtore di Fock Γ . Sia $U(t) = e^{tA}$ fortemente continuo in t , dunque lo é anche $\Gamma(U(t))$. Quindi per il Teorema di Stone esiste ed é unico l'operatore autoaggiunto $d\Gamma(A)$ (detto **seconda quantizzazione** di A), tale che:

$$\Gamma(U(t)) = \Gamma(e^{tA}) = e^{td\Gamma(A)}$$

Si tratta di una rappresentazione dell'algebra di Lie del relativo gruppo di simmetrie associato.

Sappiamo che Γ é covariante per $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, ovvero se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, allora $\Gamma(U) \in \mathcal{U}(\Gamma(\mathcal{H}))$, e si ha:

$$W(Ux) = \Gamma(U)W(x)\Gamma(U)^{-1}$$

e:

$$\Gamma(U)\Omega_F = \Omega_F$$

In particolare:

$$\phi(Ux) = \Gamma(U)\phi(x)\Gamma(U)^{-1}$$

e:

$$a^\sharp(Ux) = \Gamma(U)a^\sharp(x)\Gamma(U)^{-1}$$

dove a^\sharp indica a oppure a^* . Ricordando l'isomorfismo:

$$V : \Gamma(\mathcal{H}) \longrightarrow \bigoplus_{n=0, \infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

si pone:

$$\Gamma(U) := \bigoplus_{n=0, \infty} \Gamma_n(U)$$

dove:

$$V\Gamma_n(U)V^{-1}(x_1 \otimes_S \dots \otimes_S x_n) = Ux_1 \otimes_S \dots \otimes_S Ux_n$$

ovvero:

$$V\Gamma(U)V^{-1} = \bigoplus_{n=0, \infty} (U \otimes \dots \otimes U)|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

Ora, se $\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1, \infty} \mathcal{H}_j$, sappiamo che:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_F^{(j)}\}} \Gamma(\mathcal{H}_j)$$

Inoltre abbiamo che:

$$W(x) \cong \bigotimes_{j=1, \infty} W(x_j), \text{ con } x = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots$$

e che:

$$VW(x)\Omega = \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_F^{(j)}\}} W(x_j)\Omega_j$$

ed anche:

$$VW(x)V^{-1} = \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_F^{(j)}\}} W(x_j)$$

Infine, se $U = \bigoplus_{j=1, \infty} U_j$, si ha:

$$\Gamma(U) = \bigotimes_{j=1, \infty} \Gamma(U_j)$$

od anche:

$$V\Gamma(U)V^{-1} = \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_F^{(j)}\}} \Gamma(U_j)$$

per cui:

$$\begin{aligned} V\Gamma(U)W(x)\Omega_F &= VW(Ux)\Omega_F = VW(\bigoplus_{j=1, \infty} U_j x_j)\Omega_F = \\ &= \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_F^{(j)}\}} \Gamma(U_j)W(x_j)\Omega_F^{(j)} \end{aligned}$$

Supponiamo ora che:

$$A = \bigoplus_j A_j$$

Ne segue che:

$$e^{tA} = \bigoplus_j e^{tA_j}$$

Per quanto riguarda la seconda quantizzazione di A si ha:

$$e^{td\Gamma(A)} = \Gamma(e^{tA}) = \Gamma(\bigoplus_j e^{tA_j}) = \bigotimes_j^{\{\Omega_F^{(j)}\}} \Gamma(e^{tA_j}) = \bigotimes_j^{\{\Omega_F^{(j)}\}} e^{td\Gamma(A_j)}$$

per cui é possibile scrivere:

$$d\Gamma(A) = \sum_{j=1, \infty} I \otimes \dots \otimes I \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } j}}{d\Gamma(A_j)} \otimes I \otimes \dots$$

Vale inoltre la decomposizione:

$$d\Gamma(A) = \bigoplus_n d\Gamma_n(A)$$

dove:

$$d\Gamma_n(A) = \sum_{j=1, n} I \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } j}}{A} \otimes \dots \otimes I$$

In particolare si ha:

$$Vd\Gamma(A)V^{-1} = \bigoplus_{n=0, \infty} d\Gamma_n(A)|_{\mathcal{H}^{\otimes S^n}} = \bigoplus_{n=0, \infty} (\sum_{j=1, n} I \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } j}}{A} \otimes \dots \otimes I)|_{\mathcal{H}^{\otimes S^n}}$$

Sia ora $A = I$. Allora $U(t) = e^{tI}$, e l'operatore:

$$N := d\Gamma(I)$$

é autoaggiunto e non limitato, e prende il nome di **operatore numero di particelle**.

Questo nome é motivato dalla seguente proprietá:

$$Na^*(x_1) \cdot \dots \cdot a^*(x_n)\Omega_F = na^*(x_1) \cdot \dots \cdot a^*(x_n)\Omega_F$$

ovvero l'operatore N "conta" il numero di fattori presenti nel prodotto tensoriale consierato, ovvero il numero di "particelle" presenti nello stato a cui viene applicato. In particolare:

Lemma 1.3.6 $d\Gamma(I)\Omega_F = N\Omega_F = 0$

Si noti inoltre che valgono le seguenti formule:

$$W(e^{tI}x) = e^{tN}W(x)e^{-tN}$$

$$\phi(e^{tI}x) = e^{tN}\phi(x)e^{-tN}$$

$$e^{tI}a^*(x) = e^{tN}a^*(x)e^{-tN}$$

$$e^{-tI}a(x) = e^{tN}a(x)e^{-tN}$$

che, per t costante, possono essere interpretate come *trasformazioni di gauge del 1° tipo*.

Nel seguito supporremo sempre \mathcal{H} separabile. In tal caso:

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{n=0,\infty} e_n \mathbb{C}$$

dove $\{e_n\}$ é una base ortonormale in \mathcal{H} , e lo spazio di Fock é:

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigotimes_{n=0,\infty}^{\{\Omega_F\}} \Gamma(\mathbb{C})$$

Come abbiamo visto, questo é lo spazio degli stati di un'assemblea numerabile di oscillatori armonici. Nel caso $A = I$ possiamo scrivere:

$$I = \bigoplus_{n=0,\infty} 1$$

dove $1 \in \mathbb{C}$, e dunque:

$$e^{tI} = \bigoplus_{n=0,\infty} e^{t1}$$

Passando alla seconda quantizzazione si ha:

$$e^{tN} = \Gamma(e^{tI}) = \Gamma(\bigoplus_{n=0,\infty} e^{t1}) = \bigotimes_{n=0,\infty}^{\{\Omega_F\}} \Gamma(e^{t1}) = \bigotimes_{n=0,\infty}^{\{\Omega_F\}} e^{td\Gamma(1)}$$

dunque si ha:

$$d\Gamma(I) = N = \sum_{j=0,\infty} N_j$$

dove:

$$N_j = I \otimes \dots \otimes I \otimes d\Gamma(A_j) \otimes I \otimes \dots$$

↑
posto j

é l'operatore che conta in quale stato eccitato é il j-mo oscillatore armonico. Nel caso 1-dimensionale l'operatore $d\Gamma(1)$ é dato da:

$$d\Gamma(1) = \eta^* \eta = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - I)$$

per cui si ha:

$$\Gamma(e^{t1}) = e^{t\eta^* \eta}$$

Tornando al caso numerabile, introduciamo la notazione:

$$\eta_j^\# := a^\#(e_j) = I \otimes \dots \otimes I \otimes \eta^\# \otimes I \otimes \dots$$

↑
posto j

dove il simbolo $\#$ indica indifferentemente un operatore di creazione o di distruzione, per cui possiamo scrivere:

$$N_j = \eta_j^* \eta_j = a^*(e_j) a(e_j) = I \otimes \dots \otimes I \otimes \eta^* \eta \otimes I \otimes \dots$$

↑
posto j

e l'operatore numero di particelle diventa:

$$N = \sum_{j=0,\infty} N_j = \sum_{j=0,\infty} \eta_j^* \eta_j = \sum_{j=0,\infty} a^*(e_j) a(e_j) = \sum_{j=0,\infty} (\frac{1}{2}(p_j^2 + q_j^2) - \frac{1}{2}I)$$

Si noti che l'ultimo termine " $-\frac{1}{2}I$ " é necessario per la convergenza, infatti se lo togliessimo questa serie risulterebbe divergente: questo é un esempio di *rinormalizzazione*.

Sappiamo che nel caso di \mathcal{H} separabile di dimensione infinita si può scrivere:

$$W(\sum_i \lambda_i e_i) \cong \bigoplus_i W(\lambda_i)$$

e:

$$\phi(\sum_i \lambda_i e_i) \cong \sum_i I \otimes \dots \otimes I \otimes \alpha_i q + \beta_i p \otimes I \otimes \dots$$

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $X \subseteq \mathcal{H}$ dei vettori del tipo:

$$\sum_i \lambda_i e_i$$

dove λ_i hanno supporto finito. Poiché X é denso, poniamo per ogni $x \in X$:

$$W(x) = W(\sum_i \lambda_i e_i) = \prod_i W(\lambda_i e_i)$$

Un risultato chiave é il seguente:

Teorema 1.3.7 (*Garding-Wightman, '51*) *La rappresentazione W é quasi equivalente alla rappresentazione di Fock se e solo se l'operatore N é densamente definito.*

In altre parole il Teorema di Garding-Wightman ci dice che la rappresentazione di Fock é l'unica rappresentazione irriducibile (a meno di equivalenza unitaria) tale che l'operatore numero di particelle N é essenzialmente autoaggiunto.

Garding e Wightman hanno introdotto particolari rappresentazioni delle CCR associate a funzioni del tipo:

$$\underline{n} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$i \longmapsto n_i$$

ovvero elementi dell'insieme $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$, e di conseguenza consideriamo l'operatore:

$$N_{\underline{n}} = \sum_{j=1, \infty} (N_j - n_j I)$$

Il Teorema di Garding-Wightman ci dice che per ogni funzione $\underline{n} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ esiste una rappresentazione irriducibile $W_{\underline{n}}$ delle relazioni di Weyl tale che questo operatore sia essenzialmente autoaggiunto. Inoltre, se definiamo:

$$\mathcal{N}_0 := \{\underline{n} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}} : \underline{n} \text{ a supporto finito}\}$$

si ha:

$$W_{\underline{n}} \cong W_{\underline{n}'} \iff [\underline{n}] = [\underline{n}']$$

dove $[\cdot]$ indicano le classi di equivalenza modulo \mathcal{N}_0 (cioé \underline{n} differisce da \underline{n}' al piú in un numero finito di indici).

Sia Ω_0 lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico in $\Gamma(\mathbb{C})$. Come sappiamo, si ha:
 $\eta \Omega_0 = 0$

L'n-mo stato eccitato é definito come:

$$\Omega_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} (\eta^*)^n \Omega_0$$

Consideriamo:

$$\mathcal{H}_{\underline{n}} := \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_{n_j}\}} \Gamma(\mathbb{C})$$

Si ha:

$$W_{\underline{n}}(\sum_j \lambda_j e_j) = \bigotimes_{j=1, \infty}^{\{\Omega_{n_j}\}} W(\lambda_j)$$

Se le λ_j hanno supporto finito allora questa rappresentazione possiede solo un numero finito di fattori diversi da 1. Inoltre $W_{\underline{n}}$ é irriducibile. La rappresentazione di Fock é (a meno di quasi-equivalenza) l'unica rappresentazione irriducibile per cui le somme in $N_{\underline{n}}$ sono convergenti, mentre in generale sono infinite. Questa proprietá della rappresentazione di Fock, conseguenza del Teorema di Garding-Wightman, può essere interpretata come un risultato piú debole di unicitá.

Capitolo 2

Teoria quantistica locale

Una volta investigata la struttura matematica sottostante la Meccanica Quantistica possiamo occuparci della sua generalizzazione alla Teoria Quantistica dei Campi.

Una delle principali motivazioni di questo studio è rappresentata dal fatto che, sia nelle prime incarnazioni della teoria (che risalgono a Heisenberg, Pauli, Dirac), sia nella successiva formulazione dell'elettrodinamica quantistica (QED) ad opera di Schwinger, Feynman, Tomonaga e Dyson (fine anni 1940) che risolveva, con eccellente accordo sperimentale, il problema di come eseguire la maggior parte dei calcoli mediante l'uso dei cosiddetti diagrammi di Feynman e delle relative "correzioni radiative" (si veda [Feyn85] per un'introduzione descrittiva), quello che mancava era una formulazione matematica precisa (e con essa una soddisfacente interpretazione fisica) proprio dell'oggetto fondamentale della teoria, e cioè il campo stesso.

Il primo tentativo di colmare questa lacuna fu fatto nel decennio successivo da Garding e Wightman che proposero una serie di assiomi per caratterizzare matematicamente i campi quantistici.

Secondo Garding e Wightman una *teoria quantistica di campo scalare hermitiana* è data da quattro oggetti:

- uno spazio di Hilbert separabile \mathcal{H}
- una rappresentazione unitaria fortemente continua U del gruppo di Poincarè ristretto \mathcal{P}_+^\uparrow su \mathcal{H}

- una distribuzione φ a valori operatori (non limitati) su \mathcal{H} , che rappresenta il campo
- un sottospazio denso $D \subseteq \mathcal{H}$

tale da soddisfare alcune proprietà (che ci limitiamo ad elencare senza descrizione - per maggiori dettagli si veda [RS75]):

- * invarianza relativistica degli stati
- * condizione spettrale
- * esistenza e unicità del vuoto
- * invarianza del dominio D per il campo φ
- * regolarità del campo
- * invarianza di Poincarè del campo
- * commutatività locale (causalità microscopica)
- * ciclicità del vuoto

Una volta accettate queste premesse, la cui motivazione è quella di soddisfare alcuni requisiti fisici di base, la ricerca può essere indirizzata in due direzioni.

La prima è quella dello studio della struttura e delle conseguenze degli assiomi di Garding-Wightman. A questo proposito ricordiamo che una teoria di campo alla Wightman può essere ricavata dalla conoscenza delle sue **funzioni** (o **distribuzioni**) **di Wightman**:

$$w^n(f_1, \dots, f_n) := (\Omega, \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n) \Omega) \quad \text{con } \Omega = \text{vettore di vuoto}$$

ovvero dalla conoscenza dei **valori di aspettazione sul vuoto** dei campi. Questa è un'importante caratteristica generale della Teoria Quantistica dei Campi: tutto il contenuto fisico della teoria sembra essere codificato nell'assunzione che gli stati di particella siano eccitazioni localizzate dello stato di vuoto ottenute applicando gli operatori di campo al vettore di vuoto.

Il secondo filone di ricerca è quello della costruzione di modelli concreti che soddisfino gli assiomi di Garding-Wightman.

Nel caso realistico di spazio-tempo quadridimensionale tale programma è stato effettivamente realizzato soltanto nel caso irrealistico del campo libero, che descrive particelle che non interagiscono, ma questo risultato ha comunque una certa importanza perchè in qualche modo mostra una consistenza dell'assiomatica di base. Inoltre il modo più naturale per costruire teorie interagenti sembra essere quello di "perturbare" le teorie libere, ovvero usare il formalismo di collisione - se si preferisce un'interpretazione più orientata verso le particelle.

La situazione è migliore se si scende di dimensione: in questo caso resta però il problema di ricostruire teorie di dimensione superiore a partire da teorie di dimensione inferiore, questione che costituisce la motivazione principale della cosiddetta *olografia*.

Per il campo libero quadridimensionale la ricetta è la seguente: si definisce il campo libero astratto (alla Segal) e lo si usa per costruire esempi concreti. Nel nostro caso costruiremo per ogni $m > 0$ il campo libero scalare (cioè senza spin, $s = 0$) di massa m positiva: ciò costituirà una famiglia di esempi che soddisfano gli assiomi di Wightman.

Consideriamo lo spazio di Hilbert uniparticella \mathcal{H} e lo spazio di Fock bosonico associato $\Gamma_+(\mathcal{H})$. Introduciamo, riprendendo quanto visto in precedenza, l'**operatore di campo di Segal**:

$$\Phi_S(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+(f) + a^-(f))$$

definito sul sottoinsieme denso $\mathcal{F}_0 \subseteq \Gamma_+(\mathcal{H})$ dei vettori con un numero finito di particelle (corrispondente all'insieme \mathcal{N}_0 nella rappresentazione numero di particelle). La mappa lineare reale $f \in \mathcal{H} \mapsto \Phi_S(f) \in \Gamma_+(\mathcal{H})$ è chiamata **quantizzazione di Segal** su \mathcal{H} . Si può dimostrare che il campo di Segal così definito gode delle proprietà di autoaggiunzione, continuità, covarianza, soddisfa le relative regole di commutazione, e vale anche la ciclicità del vuoto.

Usiamo la quantizzazione di Segal per definire il *campo libero scalare* ($s = 0$) *neutro* (carica=0) *di massa* $m > 0$. Seguendo Wigner consideriamo lo spazio di Hilbert uniparticella $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{[m,0]} = L^2(\Omega_m^+, \mathbb{C}, d\Omega_m^+) \equiv L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m^+)$, e definiamo la mappa:

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{H} \\ f \mapsto Tf := \sqrt{2\pi} \hat{f}|_{\Omega_m^+}$$

dove:

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ip \cdot x} f(x) dx$$

in cui con \cdot abbiamo indicato lo pseudo-prodotto scalare di Minkowski $p \cdot x = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu$. Le definizioni di T e di $\hat{f}(p)$ sono tali che se $f(x) = g(\vec{x})\delta(t)$ allora $\sqrt{2\pi}\hat{f}$ diventa proprio l'ordinaria trasformata di Fourier 3-dimensionale di g .

Consideriamo dapprima $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ a valori reali, e definiamo:

$$\Phi_m(f) := \Phi_S(Tf)$$

Estendiamo poi la definizione ad una generica $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ nel modo ovvio:

$$\Phi_m(f) := \Phi_m(\operatorname{Re} f) + i\Phi_m(\operatorname{Im} f)$$

La mappa $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \mapsto \Phi_m(f) \in \Gamma_+(\mathcal{H})$ è chiamata **campo libero scalare hermitiano di massa m**.

Una rappresentazione unitaria del gruppo di Poincarè ristretto \mathcal{P}_+^\uparrow su $\mathcal{H}^{[m,0]} \equiv L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m^+)$ è data da:

$$(U_m(a, \Lambda)\psi)(p) := e^{ip \cdot a} \psi(\Lambda^{-1}p)$$

Si può dimostrare il seguente risultato:

Teorema 2.0.8 *La quaterna $(\Gamma_+(L^2(\Omega_m^+, d\Omega_m^+)), \Gamma(U_m(\cdot, \cdot)), \Phi_m(\cdot), \mathcal{F}_0)$ soddisfa gli assiomi di Garding-Wighman.*

Inoltre il campo $\Phi_m(f)$ è soluzione nel senso delle distribuzioni dell'equazione di Klein-Gordon:

$$\Phi_m((\square^2 + m^2)f) = 0 \quad \text{dove } \square^2 = \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta$$

Una analoga costruzione può essere effettuata nel caso di spin non triviale e porta alla definizione (matematicamente un po' più laboriosa) del campo di Dirac e dell'equazione di Dirac.

Le teorie esposte dall'inizio di questo capitolo fino a qui sono ancora basate sul concetto fisico di campo, che sta ad indicare una grandezza fisica, o una particolare configurazione di natura non ben specificata, che dipende da un punto dello spazio-tempo. Il problema di dare un senso ai campi quantistici visti come funzioni (analoghe alle funzioni d'onda) in un punto dello spazio-tempo è parzialmente risolto dalla procedura della seconda quantizzazione, in cui la funzione d'onda diventa un operatore sullo spazio di Fock che crea e distrugge particelle, anche se come è stato osservato tali oggetti non possono avere un senso puntuale, ma soltanto come distribuzioni.

A questo punto si è cercato di riformulare la teoria in una versione più fedele alla teoria quantistica di Heisenberg, ovvero basandosi esclusivamente sugli osservabili, in modo così da sfruttare il formalismo algebrico stabilito in precedenza. Questo programma è stato delineato nei primi anni '60 da Haag, Kastler, e Araki [HK64]. La teoria algebrica dunque, essendo basata sulle algebre di osservabili, si allontana da questi modelli più tradizionali di descrizione delle interazioni fondamentali, che si fondano sul concetto di campo quantistico.

Il legame tra i campi e i punti dello spazio-tempo è tuttavia espresso mediante l'implementazione del *principio di località* di Einstein come caratteristica essenziale della teoria (questo rappresenta la principale novità di questo approccio). Gli osservabili fisici, infatti, possiedono una natura locale nello spazio-tempo di Minkowski, dato che ogni processo di misura di una qualsiasi grandezza fisica avviene in una regione limitata dello spazio e in un intervallo di tempo finito.

Rudolf Haag esprime il suo punto di vista in [Haag96] "Il ruolo dei campi è quello di implementare il principio di località. La natura ed il numero dei differenti campi basilari necessari nella teoria è collegato alla struttura di carica, non allo spettro empirico delle particelle. Nelle teorie di gauge attualmente in voga i campi sono portatori di cariche chiamate colore e sapore ma non sono direttamente associati a particelle osservate come i protoni."

Il principio di località può essere introdotto nella maniera seguente. Sia \mathcal{A} la C^* -algebra degli osservabili quantistici, e \mathcal{A}_0 una sua sottoalgebra densa in norma i cui elementi autoaggiunti possono essere interpretati come **misurazioni locali**. Ad ogni $A \in \mathcal{A}_0$ associamo l'insieme $L(A)$ delle regioni spazio-temporali nelle quali A può essere misurato, tale che:

$$(i) \mathcal{O} \in L(A), \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O} \implies \mathcal{O}_1 \in L(A)$$

(ii) Se B è un elemento della $*$ -algebra generata da A_1, \dots, A_n , allora:

$$L(B) \supseteq \bigcap_{i=1, n} L(A_i)$$

cioè se tutti gli A_i possono essere misurati in una regione, allora può esserlo anche B .

Ora consideriamo per ogni regione spazio-temporale \mathcal{O} l'algebra:

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \{A \in \mathcal{A}_0 : \mathcal{O} \in L(A)\}$$

che può essere vista come l'algebra degli osservabili del sottosistema connesso alla regione \mathcal{O} .

In questa formulazione della teoria quantistica delle interazioni/particelle fondamentali il concetto centrale sono dunque gli *osservabili locali*: a partire da essi è possibile ricostruire l'intera algebra degli osservabili e dunque la struttura di superselezione. Il punto fondamentale consiste nell'assegnazione di una certa corrispondenza tra regioni limitate dello spazio-tempo e algebre di osservabili contenuti in essa, insieme con un certo numero di proprietà "assiomatiche" che tale corrispondenza deve soddisfare. La natura e il numero degli assiomi da includere come fondamento della teoria è, diversamente dalle loro conseguenze, essenzialmente arbitraria e può essere essa stessa oggetto di discussione.

2.1 Assiomi di Haag-Kastler-Araki

Consideriamo la famiglia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ dei **doppi coni** dello spazio di Minkowski, ovvero regioni definite come intersezione del futuro di un primo evento con il passato di un secondo evento contenuto nel futuro del primo. In simboli:

$$\mathcal{O} := (V^+ + x) \cap (V^- + y), \text{ con } y - x \in V^+$$

dove $V^\pm := \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 \gtrless \pm \|x\|_{\mathcal{M}}\}$ è il *cono di luce futuro/passato* ($\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ è la metrica di Minkowski, che determina la struttura causale di \mathbb{R}^4).

Il significato fisico di tali regioni è quello dell'intersezione del cono di influenza del primo evento con il cono di dipendenza del secondo evento, ovvero tutti gli eventi influenzati dal primo evento intersecati con tutti gli eventi che possono influenzare il secondo. Si tratta di una famiglia di insiemi stabili per trasformazioni di Lorentz, e dunque per l'azione del gruppo di Poincaré.

Se $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$, definiamo il **complemento causale** di \mathcal{O} come l'insieme:

$$\mathcal{O}' := \{y \in \mathbb{R}^4 : \|y - x\|_{\mathcal{M}}^2 < 0, \forall x \in \mathcal{O}\}$$

Si noti che in dimensione $4=3+1$ e $3=2+1$ \mathcal{O}' é un insieme connesso, mentre in dimensione $2=1+1$ é sconnesso.

La nozione di complemento causale rimane valida anche per un generico sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^4$. In tal caso si ha:

$$D \subseteq D''$$

mentre se $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ si ha:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}''$$

In altre parole si dice che ogni elemento $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ é **causalmente completo**.

Osserviamo che nei casi usuali \mathcal{K} é un insieme diretto, ma in generale può non esserlo, ad esempio in teorie chirali conformi in dimensione $2=1+1$. Infatti in questo caso i campi chirali (cioé che dipendono solo da una delle due coordinate del cono di luce), non massivi, in uno spazio di Minkowski 2-dimensionale, possono essere considerati campi sull'asse reale. Inoltre a causa dell'invarianza conforme l'asse reale può essere mappato nel cerchio S^1 . Un insieme di indici naturale \mathcal{K} é dunque l'insieme degli intervalli aperti non densi $I \subseteq S^1$. \mathcal{K} dunque non é diretto, in quanto l'unione di due intervalli può coprire l'intero cerchio S^1 .

Una *teoria di campo locale* é data non appena sono specificati gli osservabili associati a regioni limitate dello spazio-tempo. In altri termini si assegna una corrispondenza:

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K} \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$$

dove $\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O})''$ é un'algebra di von Neumann di operatori lineari limitati che agiscono sullo spazio di Hilbert minimale \mathcal{H}_0 , che é supposto separabile. Le algebre $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ sono chiamate **algebre locali** e i loro elementi autoaggiunti possono interpretarsi come gli osservabili misurabili in \mathcal{O} .

L'ipotesi che ogni algebra locale sia un'algebra di von Neumann equivale a richiedere che ognuna delle $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ possieda un particolare folium di stati normali $\mathcal{S}_n(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$, coincidente con quello determinato da una rappresentazione di riferimento, e che si studino stati localmente normali rispetto ad esso.

Nel modello del campo libero le algebre locali sono oggetti del tipo:

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \{e^{i\phi(f)} : f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4), \text{supp } f \subseteq \mathcal{O}\}''$$

La corrispondenza che definisce una teoria di campo locale deve soddisfare diverse proprietà.

(1) **Isotonia**

$$\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \implies \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$$

ovvero si ha un morfismo di insiemi parzialmente ordinati dall'inclusione. Ciò é equivalente all'esistenza di una famiglia di omomorfismi iniettivi che preservano l'unità:

$$i_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2} : \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$$

per ogni coppia di regioni $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, tali da soddisfare la condizione di compatibilit :

$$i_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2} \circ i_{\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3} = i_{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3}$$

se $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_3$.

Nei casi in cui \mathcal{K}   un insieme diretto, possiamo pensare $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}}$ come una successione generalizzata (net), e considerarne il limite:

$$\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

Il completamento di questa *-algebra rispetto alla sua (unica) norma C^*   detto **algebra quasilocale**:

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|}$$

Questo limite induttivo C^* ha la propriet  che non possono sorgere nuove relazioni. Sia π una rappresentazione di \mathcal{A} , e $A \in \ker \pi$, ovvero $\pi(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$. Allora esiste una successione $\{\mathcal{O}_n\} \subseteq \mathcal{K}$, e $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_n)$, con $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. Allora $\|\pi(A_n)\| \rightarrow 0$. Ora:

$$\|\pi(A_n)\| = \inf\{\|A_n - B_n\|, B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_n), \pi(B_n) = 0\}$$

Dunque esiste una successione $B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_n)$, $\pi(B_n) = 0$ con $\|A_n - B_n\| \rightarrow 0$, e perci :

$$\|A_n - B_n\| \leq \|A - A_n\| + \|A - B_n\| \rightarrow 0$$

ovvero il nucleo di π   il completamento dell'unione dei nuclei di $\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})}$. Se in particolare $\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})}$   fedele per ogni \mathcal{O} , allora anche π   fedele.

Sar  \mathcal{A} la nostra C^* -algebra degli osservabili (nel seguito con \mathcal{A} indicheremo sia il net che definisce le algebre locali che la C^* -algebra degli osservabili quasilocali).

Si suppone inoltre che \mathcal{A} sia irriducibile su \mathcal{H}_0 , ovvero che $\mathcal{A}' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{I}_{\mathcal{H}_0}$ (Lemma di Schur). In queste condizioni lo spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 descrive un unico settore di superselezione, il **settore di vuoto**, corrispondente alla rappresentazione irriducibile π_0 , che nei casi usuali coincide con la rappresentazione identica.

Nel caso del campo libero scalare l'irriducibilit  di:

$$\mathcal{A} = \{e^{i\phi(f)} : f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)\}'' = \mathcal{B}(\Gamma(\mathcal{H}))$$

si dimostra usando il fatto che l'insieme $\{Tf : f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)\}$   denso in $\mathcal{H}^{[m,0]}$.

(2) Localit 

Poich  tra eventi relativi a regioni spazialmente separate non ci pu  essere nessuna influenza, si richiede che gli osservabili associati a tali regioni commutino tra loro:

$$\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2' \implies \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'$$

dove \mathcal{O}_2'   il complemento causale di \mathcal{O}_2 , e $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'$   commutante dell'algebra di von Neumann $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.

Tale assioma serve ad implementare il **principio di causalit  di Einstein**, infatti per definizione esso implica l'impossibilit  da parte di qualsiasi segnale di propagarsi a velocit  maggiore di c .

Un'altra maniera di descrivere questo postulato   la seguente: operazioni in \mathcal{O}_1 (rappresentate da isometrie $V \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$) non influenzano i risultati di misurazioni di osservabili in \mathcal{O}_2 :

$$\omega(V^*AV) = \omega(A)$$

con $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2), V \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1), V^*V = 1, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Questa condizione vale anche in spazi tempi piú generali (non piatti) con struttura causale data dal relativo tensore metrico.

Si noti che questa condizione lascia fuori da \mathcal{A} i campi fermionici, che non commutano ma *anticommutano* a distanze spacelike. In altre parole a causa della commutatività spacelike gli stati uniparticella nel settore di vuoto sono necessariamente bosoni. Formalmente si possono ottenere statistiche fermioniche ammettendo l'anticommutatività spacelike per operatori di campo non osservabili, che tuttavia, a differenza della commutatività che ha un preciso significato fisico, sembra essere una richiesta completamente ad hoc.

(3) Dualità di Haag-Araki

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}^d(\mathcal{O})$$

dove $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}^d(\mathcal{O}) := \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$ è la *rete duale* di \mathcal{A} (poiché in genere \mathcal{O}' è non limitato, $\mathcal{A}(\mathcal{O}')$ indica la sottoalgebra di von Neumann di \mathcal{A} generata da $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) : \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}'\}$).

Si noti che per la località di \mathcal{A} risulta $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{A}^d(\mathcal{O})$, sicché tale condizione può essere vista come la richiesta che \mathcal{A} sia massimale rispetto alla località.

Piú precisamente vale la dualità per una regione $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}$, nella rappresentazione π , se:

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \mathcal{R}(\mathcal{O})'$$

dove $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ è l'algebra di von Neumann $\pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''$ di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$.

La dualità di Haag (usata nella formulazione originale della teoria DHR) vale per il campo libero. Si noti che se la dualità di Haag vale per doppi coni nel settore di vuoto, non è detto che valga per altre regioni o in altri settori. La possibilità che questa dualità non sia piú valida per doppi coni e nel settore di vuoto indica la presenza di una rottura spontanea di simmetria ([Rob76], [BDLR92]). In questo caso vale soltanto una versione piú debole detta **dualità essenziale**:

$$\mathcal{A}^d(\mathcal{O}) = \mathcal{A}^d(\mathcal{O}')'$$

ovvero la rete \mathcal{A}^d soddisfa la dualità. La dualità essenziale è verificata non appena la rete è generata (in un senso opportuno) da campi di Wightman, dunque può essere considerata una proprietà generale della teoria.

(4) Poincaré-covarianza

Il gruppo di simmetrie geometriche dello spazio-tempo di Minkowski è dato dal gruppo di Poincaré ristretto \mathcal{P}_+^\uparrow , ovvero dal suo rivestimento universale $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, pertanto esiste una rappresentazione α del gruppo \mathcal{P}_+^\uparrow visto come gruppo di automorfismi di \mathcal{A} , e tramite essa le trasformazioni di Poincaré $L = (x, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ sono rappresentate da automorfismi $\alpha_L \equiv \alpha_{(x, \Lambda)}$ in modo tale che:

$$\alpha_{(x, \Lambda)}(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}((x, \Lambda)\mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

In altre parole esiste una famiglia di isomorfismi $\alpha_L^\mathcal{O} : \mathcal{A}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{A}(L\mathcal{O})$ con $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ e $L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ tale che, per $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$:

$$\alpha_L^{\mathcal{O}_2}|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)} = \alpha_L^{\mathcal{O}_1}$$

e:

$$\alpha_{L'}^{L\mathcal{O}} \circ \alpha_L^\mathcal{O} = \alpha_{L'L}^{L\mathcal{O}}$$

Passando al rivestimento universale, ciò si esprime nell'esistenza di un omomorfismo di gruppo:

$$(x, \tilde{\Lambda}) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \longmapsto \alpha_{(x, \tilde{\Lambda})} \in \text{Aut}(\mathcal{A})$$

tale che per ogni elemento $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ si ha:

$$\alpha_{(x, \tilde{\Lambda})}(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(\Lambda\mathcal{O} + x)$$

($\eta : (x, \tilde{\Lambda}) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \mapsto (x, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ indica l'omomorfismo di rivestimento). Questa richiesta garantisce la covarianza relativistica della teoria, e può anche essere trasferita analogamente a spazi-tempi con altre simmetrie, ma non ha un analogo in uno spazio-tempo curvo generale.

(5) Condizione spettrale

Uno stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ dell'algebra \mathcal{A} degli osservabili quasilocali si dice **Poincaré-invariante** se risulta:

$$\omega(\alpha_{(x, \tilde{\Lambda})}(A)) = \omega(A) \quad A \in \mathcal{A}, (x, \tilde{\Lambda}) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$$

Nel formalismo algebrico si postula che l'algebra \mathcal{A} degli osservabili quasilocali possieda un unico stato puro ω_0 Poincaré-invariante, detto **stato di vuoto** (ovvero il funzionale di aspettazione del vuoto). Indicando con $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \Omega_0)$ la terna GNS relativa allo stato ω_0 , è facile verificare che nella rappresentazione del vuoto l'espressione:

$$U(x, \tilde{\Lambda})\pi_0(A)\Omega_0 := \pi_0(\alpha_{(x, \tilde{\Lambda})}(A)) \quad A \in \mathcal{A}, (x, \tilde{\Lambda}) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$$

definisce una rappresentazione unitaria del gruppo $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, che si postula essere continua. Tale rappresentazione è covariante, ovvero implementa unitariamente $\alpha_{(x, \tilde{\Lambda})}$, essendo:

$$\pi_0(\alpha_{(x, \tilde{\Lambda})}(A)) = U(x, \tilde{\Lambda})\pi_0(A)U(x, \tilde{\Lambda})^* \quad A \in \mathcal{A}, (x, \tilde{\Lambda}) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$$

Gli operatori autoaggiunti P^μ , ottenuti attraverso l'equazione:

$$U(x, 1) = e^{iP^\mu x_\mu}, \quad x \in \mathbb{R}^4$$

si interpretano come le componenti del quadrivettore energia-impulso. Per ogni elemento $x \in \mathbb{R}^4$ otteniamo:

$$U(x, 1)\Omega_0 = \Omega_0$$

per un vettore non nullo $\Omega_0 \in \mathcal{H}_0$ (unico a meno di un fattore), detto **vettore di vuoto**.

Si noti che dall'unicità del vettore Ω_0 segue la purezza dello stato $\omega_0(\cdot) = (\Omega_0, \cdot\Omega_0)$, o equivalentemente il fatto che \mathcal{A} è irriducibile su \mathcal{H}_0 , come deve essere.

Assumiamo che la rappresentazione $U(x, \tilde{\Lambda})$ soddisfi la condizione spettrale:

$$\text{Sp}(U(x, 1)) \subseteq \overline{V^+}$$

La condizione spettrale è una condizione di stabilità che serve a garantire che lo stato di vuoto Ω_0 sia uno stato di energia minima del sistema.

(6) Additività

Per ogni ricoprimento $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di un aperto limitato $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$, l'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ è contenuta nell'algebra di von Neumann generata da $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}_\alpha)\}$:

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha \implies \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \bigvee_{\alpha \in I} \mathcal{A}(\mathcal{O}_\alpha)$$

Poiché l'insieme \mathcal{K} dei doppi coni è una base per la topologia dello spazio di Minkowski \mathcal{M} , ogni aperto \mathcal{O} di \mathcal{M} è ricoperto da una famiglia di aperti di \mathcal{K} . Dunque per l'additività è possibile vedere il net:

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K} \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

come un sottonet di:

$$\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

dove \mathcal{O} é un aperto limitato di \mathcal{M} .

L'additivitá ci dice che ogni regione dello spazio-tempo contiene abbastanza osservabili locali da ricostruire ogni algebra locale.

L'additivitá puó essere anche vista come conseguenza dell'esistenza di campi.

L'esistenza di una legge dinamica causale, in termini di dati di Cauchy, é alla base del seguente assioma "time slice".

(7) Time-slice

Se f é una soluzione di un'equazione differenziale iperbolica, allora $f(x)$ é determinata dai valori di f e della sua derivata normale su una ipersuperficie spaziale \mathcal{C} , con la proprietá che ogni curva causale inestendibile uscente da x e diretta nel passato (o nel futuro) interseca la superficie \mathcal{C} (una tale regione é detta *superficie di Cauchy*).

In Teoria Quantistica dei Campi la formulazione esatta di una legge dinamica si é rivelata un problema difficile, ed é ottenuta soltanto in pochi casi speciali.

Nel formalismo algebrico si puó comunque formulare l'**assioma time-slice**.

Sia \mathcal{G} una regione globalmente iperbolica, e sia U un intorno di una superficie di Cauchy di \mathcal{G} . Allora:

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(U)$$

La coincidenza dell'algebra di un intorno di una superficie di Cauchy di una data regione con l'algebra della regione intera esprime l'esistenza di un'equazione iperbolica del moto. Tuttavia questo assioma non ha ancora trovato grandi applicazioni: non si ha ancora una soddisfacente caratterizzazione della dinamica nel contesto della AQFT.

Esempi di modelli fisici descritti da nets di algebre si costruiscono utilizzando i campi di Wightman, come nel caso del campo libero.

Per alcuni esempi di teorie di campo quantistiche, si veda [Fred95], Capitolo 2.3.

Inoltre, grazie alla teoria di Tomita-Takesaki, é possibile, nel caso di particelle libere bosoniche o fermioniche, associare nets di algebre a sistemi uniparticella in modo canonico, cioé senza usare il formalismo di Wightman, ma usando solo le proprietá geometriche dello spazio-tempo di Minkowski e la teoria delle rappresentazioni di Wigner ([BGL02]).

Tra il gran numero di rappresentazioni dell'algebra degli osservabili c'è una importante sottoclasse, quella delle rappresentazioni ad energia positiva, che abbiamo già incontrato nel caso della rappresentazione identica ovvero del vuoto.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra e $\alpha_t, t \in \mathbb{R}$ un gruppo a 1 parametro di automorfismi. Una **rappresentazione a energia positiva** (π, U) della coppia (\mathcal{A}, α) é una rappresentazione π di \mathcal{A} in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e una rappresentazione unitaria fortemente continua U di \mathbb{R} (come gruppo additivo) in \mathcal{H} , tale che:

(i) U implementa α , cioé:

$$U(t)\pi(A)U(t)^{-1} = \pi(\alpha_t(A))$$

(ii) il generatore autoaggiunto di U :

$$H := \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U(t)$$

é un operatore positivo (in generale non limitato).

Vogliamo identificare l'operatore H con l' "energia" dell'osservabile. Ma a priori non é chiaro se H puó essere approssimato da osservabili nell'algebra \mathcal{A} . Vale il seguente teorema:

Teorema 2.1.1 (*Borchers*) Sia (π, U) una rappresentazione ad energia positiva di (\mathcal{A}, α) . Allora esiste un gruppo a 1 parametro fortemente continuo di unitari $V(t) \in \pi(\mathcal{A})''$, tale che (π, V) é una rappresentazione ad energia positiva.

Dim. ([BR79], 3.2.46)

In altre parole, data una rappresentazione ad energia positiva di \mathbb{R} , ne esiste un'altra data da un gruppo a un parametro fortemente continuo di unitari nell'algebra di von Neumann $\pi(\mathcal{A})$, che é ad energia positiva ed induce gli stessi automorfismi. Il generatore K di V puó essere approssimato da elementi di $\pi(\mathcal{A})$, e in questo senso puó essere identificato con l' "energia" dell'osservabile. Questo giustifica il nome "rappresentazione ad energia positiva", dal momento che le proiezioni spettrali del generatore K di V sono contenute nella chiusura dell'algebra degli osservabili. Inoltre K non é unico: si puó aggiungere a K un qualsiasi operatore positivo nel centro di $\pi(\mathcal{A})''$.

Vale anche una generalizzazione multidimensionale (che é il caso incontrato in precedenza nella rappresentazione identica). Se U é una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo delle traslazioni dello spazio di Minkowski (\mathbb{R}^4) con:

$$\begin{aligned} U(x)\pi(A)U(x)' &= \pi(\alpha_x(A)) \\ U(x) &= e^{ixP}, \sigma(P) \subseteq \overline{V^+} \\ \text{allora possiamo scegliere } U(x) &\in \pi(\mathcal{A})''. \end{aligned}$$

Si ha il seguente risultato:

Teorema 2.1.2 (*Reeh-Schlieder*) Sia \mathcal{A} una rete covariante per traslazioni e con una rappresentazione ad energia positiva. Sia $\psi \in \mathcal{D}_{(e^{aP})}$, $a \in V^+$, e sia \mathcal{G} una regione nello spazio di Minkowski con la proprietá che esiste $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ e un intorno \mathcal{N} dello zero nel gruppo delle traslazioni, tale che:

$$(i) \mathcal{G}_0 + \mathcal{N} \subseteq \mathcal{G}$$

$$(ii) \bigvee_{x \in \mathbb{R}^4} \mathcal{A}(\mathcal{G}_0 + x) = \mathcal{A}''$$

Allora $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{G})\psi} = \overline{\mathcal{A}\psi}$, ovvero se ψ é ciclico per \mathcal{A} , é ciclico per $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.

In particolare nella rappresentazione identica il vuoto Ω_0 é ciclico per $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.

Si noti che questo risultato non dipende dalla localitá di \mathcal{A} .

Dim. ([Fred95])

Esempi di regioni \mathcal{G} :

$$(i) \text{ wedge della forma } \{\|x^0\|_{\mathcal{M}} < x^1\}$$

$$(ii) \text{ coni di luce futuri } V^+ + x$$

$$(iii) \text{ coni spacelike } \mathcal{C} = a + \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \mathcal{O}, \text{ con } \mathcal{O} \subseteq \{0\}' \text{ doppio cono}$$

(iv) doppi cono $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$, nell'ipotesi che valga l'**additivitá debole**:

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}^4} \mathcal{A}(\mathcal{O}_1 + x) = \mathcal{A}''$$

per un doppio cono piú piccolo \mathcal{O}_1 tale che $\overline{\mathcal{O}_1} \subseteq \mathcal{O}$.

Si osservi che naturalmente l'additivitá implica l'additivitá debole.

Dal Teorema di Reeh-Schlieder segue, insieme con la località, che il vettore ψ é ciclico e separante per tutte le algebre $\mathcal{A}(R)$, con $R \subseteq \mathcal{G}'$ se $\overline{\mathcal{A}\psi} = \mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}\psi = 0, A \in \mathcal{A}(R) \implies A = 0$$

Poiché $\mathcal{A}\psi = 0, A \in \mathcal{A}(R)$ segue $AB\psi = 0, \forall B \in \mathcal{A}(G)$. Dunque A svanisce in un insieme denso e dunque ovunque.

L'ultimo dei teoremi generali che consideriamo è la cosiddetta proprietà di Borchers degli operatori di proiezione nelle algebre locali. Sappiamo che il vuoto dovrebbe essere caratterizzato come "ground state" dalla condizione spettrale. Tuttavia a volte l'analisi non dipende dalla positività dell'energia né dalla covarianza della teoria sotto traslazioni spazio-temporali. Si può allora prendere come assioma, a questo livello di generalità, una condizione tecnica dovuta a Borchers:

Teorema 2.1.3 (*proprietà di Borchers, proprietà B*) Consideriamo una rete locale \mathcal{A} di algebre di von Neumann, e consideriamo una coppia di regioni $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ con $\mathcal{G}_0 + \mathcal{N} \subseteq \mathcal{G}$ per un intorno dello zero \mathcal{N} nel gruppo delle traslazioni. Sia $E \in \mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$ una proiezione. Allora esiste un'isometria $V \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$ tale che $V^*V = E$.

La proprietà B può anche essere dimostrata a partire da principi primi: ciò é una conseguenza dell'irriducibilità e della condizione spettrale.

Un'applicazione della proprietà di Borchers è la seguente:

Teorema 2.1.4 Sia \mathcal{A} una rete di algebre di von Neumann che soddisfano la proprietà di Borchers. Allora $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$ è un'algebra semplice (\mathcal{A} non contiene ideali chiusi non banali).

Dim.

Sia J un ideale chiuso di \mathcal{A} , $J \neq \{0\}$. Allora $J \cap \mathcal{A}(\mathcal{O}) \neq \{0\}$, per qualche \mathcal{O} . Sia $B \in J \cap \mathcal{A}(\mathcal{O})$, $B > 0$, e sia E la proiezione spettrale di B sull'intervallo $[\varepsilon, \|B\|]$, $0 < \varepsilon < \|B\|$. Allora $E \neq 0$, e $B \geq \varepsilon E$. Per la proprietà di Borchers, in $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ con $\mathcal{O}_1 \supseteq \overline{\mathcal{O}}$ esiste un'isometria V con $V^*V = E$. Così:

$$V^*BV \geq \varepsilon V^*EV = \varepsilon V^*VV^*V = \varepsilon 1$$

cioè V^*BV è invertibile. Poiché con B anche V^*BV appartiene a J , segue che $J = \mathcal{A}$.

■

2.2 Teoria dei settori di superselezione

Abbiamo visto che, corrispondentemente al fatto di avere infiniti gradi di libertà, esistono diverse classi di equivalenza di rappresentazioni irriducibili dell'algebra degli osservabili quasilocali \mathcal{A} , dette settori di superselezione, che avranno il significato fisico di "cariche" di superselezione.

Abbiamo anche osservato che gli stati di interesse per la fisica delle particelle sono caratterizzati dall'idealizzazione che essi descrivono poche eccitazioni localizzate del vuoto.

Per ottenere una teoria che soddisfi dei requisiti minimi di senso fisico bisogna dunque assegnare una rete locale covariante ed un unico stato puro ω_0 la cui rappresentazione GNS π_0 rappresenta settore di superselezione del vuoto.

Ricordiamo che una rappresentazione π é detta **fattoriale** se il centro degli automorfismi di allacciamento é banale, ovvero $Z(\pi, \pi) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{I}$.

In questo caso π é quasiequivalente a tutte le sue sottorappresentazioni, e il folium $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{A})$ non contiene nessun sotto-folium chiuso. Due rappresentazioni fattoriali o sono equivalenti o sono disgiunte.

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{S}_{ln}(\mathcal{A})$ degli **stati localmente normali** di \mathcal{A} cioè gli stati $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tali che $\omega|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})} \in \mathcal{S}_n(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$.

Anche se i folia locali sono minimali (e dunque le corrispondenti rappresentazioni GNS sono fattoriali) $\mathcal{S}_{ln}(\mathcal{A})$ in generale possiede molti folia minimali differenti.

Faremo l'ipotesi che tutti gli stati fisicamente rilevanti sono stati localmente normali della rappresentazione di vuoto, cioè per ogni stato $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $\omega|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})}$ é uno stato normale di $\pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})}$. Dunque consideriamo una sola classe di quasi-equivalenza di rappresentazioni per ogni algebra locale.

Il punto di partenza della teoria dei settori di superselezione nel contesto della teoria quantistica locale é l'assegnazione di un preciso criterio che seleziona, tra tutti gli stati dell'algebra quasilocale, quelli che possiedono delle buone proprietà di localizzazione. Stabilito questo, si classificano le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{A} indotte da tali stati, e si studia la struttura delle loro classi di equivalenza unitaria (settori di superselezione): come si vedrá lo studio di tale struttura permetterà di formulare una nozione generalizzata di statistica e di implementare molte nozioni di Teoria dei Campi.

Tratteremo due tipi di settori, i settori localizzabili (o DHR) e i settori topologici, che corrispondono a due diversi criteri di selezione.

2.2.1 Settori localizzabili

Sia $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ una rete locale, Poincaré-covariante, nella sua rappresentazione del vuoto, detta anche rappresentazione di definizione (denotata con π_0). Assumiamo che \mathcal{A} soddisfi la proprietà B, e la dualità essenziale.

La classe di stati che consideriamo é suggerita dal seguente criterio.

Criterio di selezione DHR ([DHR71])

Una rappresentazione π dell'algebra quasilocale soddisfa il **criterio di selezione DHR** (ovvero é detta una **rappresentazione DHR**) se per ogni doppio cono $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ sufficientemente esteso si ha:

$$\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$$

Le rappresentazioni DHR irriducibili corrispondono a settori di superselezione che rappresentano un particolare tipo di cariche fisiche dette **cariche localizzabili**.

Interpretazione fisica: se φ é uno stato normale di una rappresentazione DHR, allora:

$$\lim_{\mathcal{O} \nearrow \mathbb{R}^4} \|(\varphi - \omega_0)|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})}\| = 0$$

e di questo vale anche un parziale viceversa sotto ipotesi non restrittive. Dunque il criterio DHR seleziona gli stati che sono indistinguibili dal vuoto per osservazioni all'infinito spacelike, in un senso piuttosto forte.

La non coincidenza degli stati di π con quelli di π_0 può dunque essere imputata alla presenza di una "carica" localizzabile in *ogni* $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$: osserviamo pertanto che il criterio DHR esclude stati con una carica elettrica totale non nulla, dal momento che essa può essere misurata, grazie alla legge di Gauss, nel complemento spacelike di qualunque regione limitata. Questo é dovuto alla massa nulla del fotone, che implica che

la forza elettromagnetica è a lungo range. Il criterio DHR non fornisce dunque tutte le rappresentazioni rilevanti per la fisica delle particelle elementari, ma descrive una classe importante di queste rappresentazioni e ne fornisce la collezione completa nel caso di modelli semplificati: esempi di carichi localizzabili sono il numero barionico o la stranezza in QCD pura.

Come vedremo, in teorie massive esistono anche cariche non DHR (che verranno dette cariche topologiche).

Consideriamo l'insieme $DHR(\mathcal{A})$ delle rappresentazioni DHR di \mathcal{A} . Dalla proprietà B segue che $DHR(\mathcal{A})$ è chiuso sotto somme dirette e sottorappresentazioni. In realtà esso possiede una struttura molto più ricca, che può essere scoperta mettendolo in corrispondenza con l'insieme degli endomorfismi dell'algebra quasilocale duale \mathcal{A}^d . Questo fa uso di nozioni di teoria delle categorie.

L'insieme $DHR(\mathcal{A})$ risulta essere, in maniera naturale, l'insieme degli oggetti di una categoria \mathbf{C}^* , il cui spazio dei morfismi (π_1, π_2) tra due oggetti π_i , $i = 1, 2$, è dato dagli operatori di allacciamento tra π_1 e π_2 . Si può vedere che questa categoria è isomorfa a $DHR(\mathcal{A}^d)$, associando ad ogni $\pi \in DHR(\mathcal{A})$ la sua unica estensione $\tilde{\pi}$ ad \mathcal{A}^d , che è un elemento di $DHR(\mathcal{A}^d)$.

Introduciamo ora una nuova categoria. Sia \mathcal{A} un net di \mathbf{C}^* -algebre. Un endomorfismo $\rho \in \text{End}(\mathcal{A})$ è detto **localizzato** in un doppio cono \mathcal{O} se $\rho(A) = A$, $\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$. Un endomorfismo ρ localizzato in \mathcal{O} è detto **trasportabile** se per ogni doppio cono \mathcal{O}_1 esiste ρ_1 localizzato in \mathcal{O}_1 e un unitario $U \in \mathcal{A}$ che allaccia ρ e ρ_1 . Indichiamo con Δ la categoria \mathbf{C}^* degli endomorfismi trasportabili localizzati di \mathcal{A}^d : lo spazio dei morfismi tra endomorfismi localizzati e trasportabili ρ e σ , denotato (ρ, σ) , è il sottospazio degli operatori di allacciamento tra ρ e σ che appartengono ad \mathcal{A}^d .

Infine, ricordando che una sottocategoria $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ si dice **piena** se $\forall X, Y \in \mathcal{C}'$ si ha $\text{hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, denoteremo con $\Delta(\mathcal{O})$ la sottocategoria piena di Δ definita dagli endomorfismi localizzati in \mathcal{O} .

Ora, grazie alla dualità essenziale, esiste un'equivalenza categorica tra $DHR(\mathcal{A}^d)$ e Δ , che è data dall'identità sui morfismi, e da $\rho \in \Delta \rightarrow \tilde{\pi}_0 \circ \rho \in DHR(\mathcal{A}^d)$ sugli oggetti, dunque possiamo considerare la categoria Δ in luogo di $DHR(\mathcal{A})$.

Ciò che si guadagna a considerare gli endomorfismi è che essi permettono una semplice e naturale definizione di **composizione di settori**, dal momento che è facile mostrare che $\rho\sigma \in \Delta$ (composizione di endomorfismi) per $\rho, \sigma \in \Delta$, e che la struttura di semigruppato così definita su Δ , con la rappresentazione del vuoto $\tilde{\pi}_0$ come identità, passa al quoziente Δ / \cong .

E' possibile dunque definire un corrispondente prodotto sui morfismi:

$$(T_1, T_2) \in (\rho_1, \sigma_1) \times (\rho_2, \sigma_2) \mapsto T_1 \times T_2 := T_1 \rho_1(T_2) \in (\rho_1 \rho_2, \sigma_1 \sigma_2)$$

in modo tale da equipaggiare Δ con la struttura di **categoria tensoriale \mathbf{C}^*** .

La legge di composizione di settori è soltanto il primo esempio di una struttura di cariche fisiche che è presente nell'insieme delle rappresentazioni della rete \mathcal{A} .

Veniamo dunque alla classificazione delle statistiche. Si può mostrare ([DHR71]) che, grazie alla località, e al fatto che in dimensione $d = 4$ il complemento spacelike di un doppio cono è connesso, la simmetria di scambio di n cariche identiche è descritta da rappresentazioni unitarie $\varepsilon_\rho^{(n)} : \mathbb{P}(n) \rightarrow (\rho^n, \rho^n) \equiv \rho^n(\mathcal{A}^d)'$, dove $\mathbb{P}(n)$ è il gruppo delle permutazioni di n oggetti, $n \in \mathbb{N}$, e che le classi di equivalenza unitaria di tali

rappresentazioni sono classificate, per ogni $n \in \mathbb{N}$, da un singolo numero $d_\xi \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, detto **dimensione statistica**, e se $d_\xi < \infty$, da un segno σ_ξ , dipendente solo dalla classe $\xi := [\rho]$. Il caso $1 \leq d_\xi < \infty$ (in cui si dice che ρ ha **statistica finita**) é una generalizzazione della ordinaria *statistica di Bose* ($d_\xi = 1, \sigma_\xi = +$) o *di Fermi* ($d_\xi = 1, \sigma_\xi = -$), chiamata **parastatistica di ordine** d_ξ .

Si può vedere che entrambe le statistiche para-Bose e para-Fermi confluiscono nella statistica di Boltzmann per $d_\xi \rightarrow \infty$ ([Gre53]).

Nel caso di dimensione inferiore la situazione è più complessa, e varia a seconda del tipo di localizzazione che consideriamo. Ad esempio, in uno spazio-tempo di dimensione $3=2+1$, campi quantistici locali (cioè localizzati in regioni limitate) sono ancora ristretti all'alternativa Bose-Fermi, ma "particelle estese", accoppiate al vuoto da campi localizzati in coni di ampiezze angolari arbitrariamente piccole (è il caso delle cariche topologiche, che vedremo), possono esibire statistiche intermedie.

Se consideriamo cariche localizzabili in uno spazio-tempo di dimensione $2=1+1$ (o eventualmente anche cariche topologiche in uno spazio-tempo di dimensione $3=2+1$) si arriva ad una nozione ancora più generale di statistica, descritta in termini di rappresentazioni del gruppo delle trecce, invece che del gruppo delle permutazioni.

Una spiegazione di questo fatto è che la statistica di particelle è legata ad un particolare operatore, detto *operatore statistico*, che è un invariante topologico rispetto alla scelta di una coppia di regioni ausiliarie causalmente disgiunte, se tali coppie possono essere deformate l'una nell'altra con continuità mantenendo una separazione relativa di tipo spazio. Ad esempio la teoria DHR per uno spazio-tempo di dimensione $2=1+1$ ammette due operatori statistici distinti, uno l'inverso dell'altro, come conseguenza del fatto che il complemento causale di regioni limitate dello spazio-tempo è costituito da due componenti connesse.

Infine, alcuni modelli, in particolare le teorie di campo conformi bidimensionali, esibiscono una ricca struttura di settori di superselezione che non sembra adattarsi alla teoria delle rappresentazioni di alcun gruppo.

E' possibile mostrare ([DHR74]) che nel caso in cui ρ ha statistica finita (al quale é possibile ricondursi imponendo opportune condizioni spettrali), esiste un **endomorfismo coniugato** $\bar{\rho}$ tale che $\rho\bar{\rho}$ e $\bar{\rho}\rho$ contengono entrambi la rappresentazione del vuoto di \mathcal{A}^d , sicché $\bar{\xi} := [\bar{\rho}]$ viene interpretata come l'**anticarica** di ξ . In questo modo si trova nella teoria una simmetria particella/antiparticella dei numeri quantici di superselezione, che implementa l'analoga simmetria in Teoria dei Campi.

Inoltre la composizione di settori produce sempre una somma diretta *finita* di settori. La struttura risultante sulla sottocategoria piena Δ_f di Δ data da somme dirette finite di rappresentazioni irriducibili con statistica finita, é quella di una categoria tensoriale \mathbb{C}^* simmetrica, che ha come sotto-oggetti somme dirette e coniugati, e con $(\widetilde{\pi}_0, \widetilde{\pi}_0) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{I}$ ([DHR89b]), che é l'oggetto principale del Teorema di ricostruzione di Doplicher-Roberts.

In particolare, avremo a che fare con **endomorfismi covarianti** $\rho \in \Delta_f$, ovvero oggetti per i quali esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua U_ρ di $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ su \mathcal{H} , tale che:

$$\rho \circ \alpha_{\eta(s)}(A) = U_\rho(s)\rho(A)U_\rho(s)^*, \text{ con } A \in \mathcal{A}^d, s \in \widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$$

cioé tale che (ρ, U_ρ) é una rappresentazione covariante del *sistema dinamico* \mathbb{C}^* $(\mathcal{A}^d, \alpha_{\eta(\cdot)})$.

Sottolineiamo che se Δ_C é la sottocategoria piena di Δ_f data dagli endomorfismi covarianti, allora Δ_C é una categoria dello stesso tipo di Δ_f , ed inoltre tutte le rappresentazioni U_ρ soddisfano la condizione spettrale ([DHR74]).

Infine, se si assume la piena Poincaré-covarianza e la condizione spettrale nel settore di vuoto, é possibile dimostrare il noto Teorema spin-statistica che esprime la connessione tra lo spin e il carattere Bose/Fermi delle parastatistiche, per un settore finito ξ che contenga stati uniparticella con "degenerazione di massa" finita (ovvero per cui ad uno stesso valore di m corrisponde un numero finito di rappresentazioni irriducibili di massa m del gruppo di Poincaré nel settore ξ):

$$(-1)^{2j} = \sigma_\xi$$

dove j é lo spin/elicitá della corrispondente rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré. In altre parole particelle e campi con spin intero obbediscono alla statistica di Bose, quelli con spin semi-intero alla statistica di Fermi ([BF82]).

Questa forma del Teorema di Pauli é stata stabilita per la prima volta in [DHR74] per cariche localizzabili direttamente in termini di osservabili, e successivamente é stata estesa a cariche topologiche sfruttando l'esistenza di teoremi dell'algebra di campo ([BE85]).

E' anche possibile sviluppare una teoria dello scattering direttamente in termini dell'algebra degli osservabili e della sua struttura di superselezione, introducendo un algoritmo conveniente per il prodotto di stati localizzati, il *fibrato dei campi* ([DHR74]).

2.2.2 Settori topologici

Sia (\mathcal{A}, α) una rete locale covariante per traslazioni. Una rappresentazione covariante (π_m, U_m) di (\mathcal{A}, α) , con $m > 0$, si dice una **rappresentazione di singola particella massiva** se π_m é una rappresentazione fattoriale di \mathcal{A} , $U_m(x) \in \pi_m(\mathcal{A})''$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$, l'iperboloide di massa positivo Ω_m^+ é contenuto nello spettro singolare di U_m , e $Sp(U_m) \subseteq \Omega_m^+ \cup \{p \in \mathbb{R}^4 : p^2 \geq M^2, p^0 > 0\}$ per qualche $M > m$.

In altre parole π_m é una rappresentazione fattoriale ad energia positiva, covariante per traslazioni, e spettro di massa strettamente positivo e che inizia con un punto isolato (ovvero l'insieme degli stati di singole particelle é separato dal continuo da un gap nello spettro - pertanto in questo caso si dice che siamo in presenza di *mass gap*).

Teorema 2.2.1 ([BF82]) *Sia (\mathcal{A}, α) una rete locale covariante per traslazioni, e (π_m, U_m) una rappresentazione di singola particella massiva. Allora, esiste una rappresentazione irriducibile di vuoto π_0 di \mathcal{A} tale che per ogni cono spacelike \mathcal{C} :*

$$\pi_m|_{\mathcal{A}(\mathcal{C})} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$$

Dunque, anche in teorie con solo particelle massive, come ad esempio teorie di gauge non abeliane, si possono avere settori di superselezione che non soddisfano il criterio DHR.

Che tali settori si presentino effettivamente in questo tipo di teorie é suggerito dal fatto che il cono puó essere visto come una versione "ciccotta" di una stringa di flusso che unisce cariche di gauge opposte in teorie di gauge non abeliane una volta che un membro di una coppia carica-anticarica viene spostato all'infinito spacelike per dare vita ad uno stato carico.

Dunque, data una rete \mathcal{A} nella rappresentazione del vuoto π_0 su \mathcal{H}_0 , si é portati a considerare rappresentazioni π di \mathcal{A} che soddisfano un criterio di selezione piú debole ottenuto sostituendo nel criterio DHR il doppio cono \mathcal{O} con un cono spacelike \mathcal{C} :

$$\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{C}')} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{C}')}$$

Cariche soddisfacenti a questo criterio, ma non a quello DHR, sono dette **cariche topologiche**. Lavorando ad un livello generale dove non si assume la piena covarianza spazio-temporale, si prende questo criterio come criterio di selezione. Ciò fornisce stati carichi in QED (dove ci si aspetta che esso valga soltanto per alcuni coni che puntano in direzioni opportune), ma é limitato a teorie massive incluse la già citate teorie di gauge non abeliane.

Assumendo anche la dualità di Haag per coni spacelike:

$$\mathcal{A}(\mathcal{C})^- = \mathcal{A}(\mathcal{C}')'$$

e l'analoga proprietà B: per ogni proiezione non nulla $E \in \mathcal{A}(\mathcal{C}')'$, ed ogni cono spacelike $\mathcal{C}_1 \supseteq \overline{\mathcal{C}}$, esiste un'isometria $W \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)'$ con E come proiezione finale (il che é anche una conseguenza dell'additività debole e della condizione spettrale), é possibile sviluppare una teoria dei settori di superselezione per settori topologici simile a quella per settori localizzabili.

In particolare, in questo caso é anche conveniente spostarsi dalle rappresentazioni che obbediscono al "criterio DHR per coni spacelike" al corrispondente insieme Δ degli omomorfismi localizzati e trasportabili $\rho \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ definito nella maniera evidente.

La ragione per cui ora non si ottengono endomorfismi di \mathcal{A} é che per la dualità di Haag per coni spacelike un $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$ é solo tale che:

$$\rho(\mathcal{A}(\mathcal{C}_1)) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)^- \text{ per ogni } \mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}$$

La legge di composizione di settori non può pertanto essere in questo caso definita direttamente in termini di composizione di morfismi.

Nondimeno può essere ancora stabilita in maniera naturale, e molti dei risultati validi per cariche localizzabili, come la classificazione di statistiche (con le differenze alle quali abbiamo già accennato), o l'esistenza di coniugati, valgono ancora ([BF82],[DR90]).

Si può vedere che la statistica di rappresentazioni di particelle massive é necessariamente finita ([DHR74]), mentre resta aperta la questione se l'analisi delle statistiche possa essere effettuata in teorie con particelle non massive. La difficoltà principale nel trattare settori di massa zero é dovuta alla presenza delle cosiddette "nubi infrarosse". A sua volta l'esistenza di particelle non massive é legata sotto certe condizioni alla presenza di rottura spontanea di simmetria dal Teorema di Goldstone ([BDLR92]). Come sappiamo questa é una situazione tipica che si verifica quando é violata la dualità di Haag.

2.3 Teorie di gauge e teorema di ricostruzione

Abbiamo visto che dall'algebra degli osservabili quasi-locali sono esclusi oggetti come i campi fermionici che sono definiti dalla richiesta ad hoc di anticommutatività spacelike, e risultano pertanto non osservabili. Ciò non sorprende, poiché in virtù del principio di **invarianza di gauge** gli elementi osservabili di una teoria sono soltanto quelli che restano invariati sotto l'azione di particolari trasformazioni dette **trasformazioni di gauge**.

La motivazione principale dell'introduzione di questo principio é il caso dell'elettrodinamica classica, in cui i campi elettrico \vec{E} e magnetico \vec{B} , espressi in funzione

dei potenziali elettrodinamici scalare φ e vettore \vec{A} rispettivamente, non variano se i potenziali sono sottoposti appunto a delle cosiddette trasformazioni di gauge. Dunque nell'elettromagnetismo classico soltanto i campi, e non i potenziali, sono osservabili. Il successo della teoria di Maxwell ha fatto sí che il principio di invarianza di gauge é diventato uno dei grandi principi della fisica teorica, accanto alla legge di conservazione dell'energia e ai principi della termodinamica: esso é un requisito fondamentale per ogni teoria fisica formulata in termini di un potenziale.

Nella nostra teoria dunque l'algebra degli osservabili locali dovrá essere riformulata come parte gauge-invariante di un'algebra di campi che connettono il vuoto agli altri settori di superselezione, e non obbediscono necessariamente alla commutativitá locale.

Le trasformazioni di gauge possono essere viste come un particolare tipo di simmetrie, dette *simmetrie interne*, che non hanno carattere spazio-temporale ed hanno dunque solo un'interpretazione attiva.

Nella teoria dei settori di superselezione il ruolo dei campi inosservabili é quello di trasformare un "numero quantico di superselezione" da un settore ad un altro (naturalmente questo diventa effettivo soltanto nel caso di infiniti gradi di libertá). Prendendo come esempio di teoria dei settori di superselezione la QED non perturbativa (ammesso che ció sia lecito), Haag (fine anni 1950) distingue due tipi di operatori:

-campi osservabili che lasciano invariati i settori di superselezione, come il tensore $F^{\mu\nu}$ o la corrente $j^\mu = \psi^* \gamma^\mu \psi$

-campi "carichi" non osservabili che trasformano da un settore all'altro, come il campo fermionico Ψ

Una maniera per vedere che il campo fermionico Ψ non é osservabile é che esso non é invariante per una rotazione di 2π :

$$U(R_{\vec{n}, 2\pi})\Psi U(R_{\vec{n}, 2\pi})^{-1} = -\Psi$$

Dalla formula é altresí evidente che Ψ é invariante per una rotazione di 4π .

Osserviamo che polinomi di oggetti inosservabili possono essere osservabili: ad esempio mentre Ψ non é osservabile, lo é $\Psi^*\Psi$.

Diversamente la corrente j^μ é osservabile in quanto rispetta la piú semplice legge di invarianza di gauge, che é la simmetria $U(1)$, e cioé l'invarianza sotto la moltiplicazione per un fattore di fase unitario $e^{i\theta}$, infatti ovviamente $\psi^* \gamma^\mu \psi$ rimane invariato se ψ é moltiplicato per $e^{i\theta}$ (banale semplificazione).

In altre parole $U(1)$ é il **gruppo di gauge** della QED: alla simmetria $U(1)$ corrisponde la legge di conservazione della carica elettrica. In altre teorie l'invarianza di gauge é legata ad altri gruppi di simmetria, come é suggerito in pratica dai pattern empirici di particelle elementari e risonanze. Ad esempio, nel caso delle interazioni deboli il gruppo di gauge é $SU(2)$, e la legge di conservazione corrispondente é quella dell'isospin debole, mentre nella fisica adronica delle interazioni forti a corto range (QCD) si ha il gruppo $SU(3)$, e corrispondentemente la legge di conservazione del colore.

Il legame tra principi di invarianza e leggi di conservazione (Teorema di Noether) verrá studiato piú dettagliatamente nel prossimo capitolo.

Per quanto appena ricordato, la teoria degli osservabili locali va riformulata in modo da implementare il principio di invarianza di gauge, ovvero in modo da trattare reti di algebre generate da campi anche inosservabili, che pertanto non devono soddisfare la localitá di Einstein. Introduciamo pertanto alcune definizioni formali, seguendo quanto giá stabilito giá in [DHR69a-b].

Ricordiamo che un **omomorfismo di reti Poincaré-covarianti** $(\mathcal{A}_i, \alpha^i)$ é un omomorfismo ϕ delle reti \mathcal{A}_i che allaccia le rispettive azioni α^i del gruppo di Poincaré:

$$\phi \circ \alpha^1_{(x,\Lambda)} = \alpha^2_{(x,\Lambda)} \circ \phi$$

Sia (\mathcal{A}, α) una rete locale Poincaré-covariante. Una **rete normale Poincaré-covariante con simmetria di gauge su** (\mathcal{A}, α) é data da $(\mathcal{F}, \beta, k, \alpha^{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ dove:

- \mathcal{F} é una rete di algebre di von Neumann

- β é un'azione di un gruppo compatto G su \mathcal{F} (il gruppo di gauge) mediante automorfismi di rete

- k é un elemento centrale, tale che $k^2 = e$ (identità di G) e tale che \mathcal{F} obbedisce alla **commutatività locale \mathbb{Z}_2 -graduata** rispetto alla graduazione definita da $\gamma := \beta_k$ (questa proprietà é chiamata *normalità*)

In altre parole per $F \in \mathcal{F}$ si definiscono le sue **parti di Bose e di Fermi** come:

$$F_{\pm} := \frac{1}{2}(F \pm \gamma(F))$$

e per ogni coppia $F^i \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$, con $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}'_2$ si ha:

$$[F^1_+, F^2_+] = [F^1_+, F^2_-] = [F^1_-, F^2_+] = [F^1_-, F^2_-]_+ = 0$$

- $\alpha^{\mathcal{F}}$ é una rappresentazione del gruppo \mathcal{P}^{\uparrow}_+ visto come gruppo di automorfismi di \mathcal{F} , sicchè $(\mathcal{F}, \alpha^{\mathcal{F}})$ é una rete \mathcal{P}^{\uparrow}_+ -covariante tale che $\alpha^{\mathcal{F}}_s$ e β_g commutano per ogni $s \in \widetilde{\mathcal{P}^{\uparrow}_+}$, $g \in G$

- $\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ é un omomorfismo di reti tale che:

$$\alpha^{\mathcal{F}}_s \circ \pi_{\mathcal{F}} = \pi_{\mathcal{F}} \circ \alpha_{\eta(s)}$$

e:

$$\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{F}(\mathcal{O})^G$$

sono i punti fissi di $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ sotto l'azione β di G .

Come nel caso delle algebre di osservabili, le algebre di campo acquistano un significato fisico quando viene assegnato uno stato di vuoto. Sia $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ una rete locale, Poincaré-covariante, di algebre di von Neumann nella rappresentazione del vuoto. Una **rete normale Poincaré-covariante con simmetria di gauge nella sua rappresentazione fisica su** $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ é data da $(\mathcal{F}, V, k, U_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ dove:

- \mathcal{F} é una rete di sottoalgebre di von Neumann di \mathcal{A}

- V é una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo compatto G su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

- $k \in G$ é un elemento centrale con $k^2 = e$

- $U_{\mathcal{F}}$ é una rappresentazione unitaria fortemente continua di $\widetilde{\mathcal{P}^{\uparrow}_+}$ su $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ tale che:

(i) posto $\beta_g := AdV(g)$ e $\alpha^{\mathcal{F}}_s := AdU_{\mathcal{F}}(s)$, $(\mathcal{F}, \beta, k, \alpha^{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ é una rete normale Poincaré-covariante con simmetria di gauge su (\mathcal{A}, AdU)

(ii) le traslazioni $x \rightarrow U_{\mathcal{F}}(x, 1)$ soddisfano la condizione spettrale

(iii) Ω_0 é gauge-invariante, $V(g)\Omega_0 = \Omega_0$ $g \in G$, ed é l'unico vettore invariante per traslazioni in $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

(iv) l'unione delle algebre $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ su tutti i doppi coni $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ é irriducibile

(vi) \mathcal{H}_0 é ciclico per ogni algebra $\mathcal{F}(\mathcal{O})$

- $\pi_{\mathcal{F}}$ é una rappresentazione di \mathcal{A} su $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ contenente la rappresentazione del vuoto π_0 come sottorappresentazione su $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

Data questa definizione, il Teorema di Reeh-Schlieder e le relazione di commutazione normali implicano che Ω_0 é separante per le algebre di von Neumann locali $\mathcal{F}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}(\mathcal{O})''$: infatti se $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ é tale che $F\Omega_0 = 0$ allora per l'invarianza di gauge di Ω_0 , si

ha anche che $F_{\pm}\Omega_0 = 0$, cosicché se $F' \in \mathcal{F}(\mathcal{O}')$ allora dalla normalità segue che $FF'\Omega_0 = F'F_+\Omega_0 + (F'_+ - F'_-)F_-\Omega_0 = 0$, ed infine, per il Teorema di Reeh-Schlieder applicato a $\mathcal{F}(\mathcal{O}')$, si ha $F = 0$.

Nel caso di cariche topologiche, anche i campi saranno localizzati in coni spacelike, sicché al posto di una rete $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O})$ su insiemi limitati, si ottiene una corrispondenza isotonica $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$ su coni spacelike (che per abuso di linguaggio continueremo a chiamare rete, nonostante i coni spacelike \mathcal{C} non formino un insieme diretto). Nel caso in cui \mathcal{F} è una rete su coni spacelike \mathcal{C} , effettuate le ovvie modifiche nelle definizioni precedenti, chiameremo $(\mathcal{F}, \beta, k, \alpha^{\mathcal{F}})$ una **rete normale estesa Poincaré-covariante con simmetria di gauge**.

Il caso che ci interessa ai fini del Teorema di ricostruzione è naturalmente quello fisico in cui viene specificato il settore di vuoto. Sia $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ una rete locale, Poincaré-covariante, di algebre di von Neumann nella rappresentazione del vuoto π_0 . Una **rete normale estesa Poincaré-covariante con simmetria di gauge nella sua rappresentazione fisica su $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$** è data da $(\mathcal{F}, V, k, U_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ dove:

- \mathcal{F} è una rete estesa di sottoalgebre di von Neumann di $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}})$, dove $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ è uno spazio di Hilbert

- V è una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo compatto G su $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

- $k \in G$ è un elemento centrale con $k^2 = e$

- $U_{\mathcal{F}}$ è una rappresentazione unitaria fortemente continua di $\widetilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$ su $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ tale che:

(i) posto $\beta_g := AdV(g)$ e $\alpha_s^{\mathcal{F}} := AdU_{\mathcal{F}}(s)$, $(\mathcal{F}, \beta, k, \alpha^{\mathcal{F}})$ è una rete normale estesa Poincaré-covariante di algebre di von Neumann con simmetria di gauge

(ii) le traslazioni $x \rightarrow U_{\mathcal{F}}(x, 1)$ soddisfano la condizione spettrale

(iii) Ω_0 è gauge-invariante, $V(g)\Omega_0 = \Omega_0$ $g \in G$, ed è l'unico vettore invariante per traslazioni in $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

(iv) $\alpha_s^{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}} = \pi_{\mathcal{F}} \circ \alpha_{\eta(s)}$ e $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))^- = \mathcal{F}(\mathcal{C})^G$

(v) per ogni \mathcal{C} , l'unione di tutte le algebre $\mathcal{F}(\mathcal{C} + x)$, $x \in \mathbb{R}^4$, è irriducibile

(vi) \mathcal{H}_0 è ciclico per ogni algebra $\mathcal{F}(\mathcal{C})$

- $\pi_{\mathcal{F}}$ è una rappresentazione di \mathcal{A} su $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ contenente la rappresentazione del vuoto π_0 come sottorappresentazione su $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

Naturalmente, in entrambi i casi di cariche localizzabili o topologiche, è necessario fare un'ipotesi di abbondanza di sottorappresentazioni di $\pi_{\mathcal{F}}$ (che altrimenti potrebbero ridursi soltanto alla rappresentazione di definizione π_0). Pertanto, si suppone che la nostra rete sia **completa**, ossia che ogni settore di superselezione compaia nella riduzione di $\pi_{\mathcal{F}}$: in altre parole ogni rappresentazione irriducibile con statistica finita che soddisfa il criterio di selezione considerato appare come sottorappresentazione di $\pi_{\mathcal{F}}$. Si noti che questo fatto, che a questo livello è presa come assunzione, nel Teorema di ricostruzione viene dimostrato.

Abbiamo visto nella sezione precedente che le principali proprietà delle cariche che appaiono in Teoria dei Campi sono direttamente collegate alla struttura algebrica degli osservabili locali della teoria, e in particolare alla famiglia delle loro rappresentazioni.

Nell'ottica della teoria dei settori di superselezione come sottospazi coerenti di uno spazio di Hilbert "universale" sul quale operano campi inosservabili, si può congetturare che anche la struttura algebrica dei campi portatori di carica (e in particolare le loro

relazioni di commutazione, con l'alternativa Bose-Fermi) possa essere letta direttamente dalla rete di osservabili locali e dalla sua struttura di superselezione.

Ricordando l'esempio della QED, poichè il ruolo dei campi fermionici inosservabili Ψ è quello di far passare da un settore all'altro, essi sembrerebbero necessari per costruire (creare dal vuoto) stati con differenti cariche (nel nostro caso elettriche). Tuttavia, si può ipotizzare che ciascun settore contenga tutte le informazioni fisicamente rilevanti della teoria (come è stato osservato dallo stesso Haag), ovvero che i campi inosservabili non siano necessari a fornire una descrizione fisicamente completa: in questo modo l'algebra degli osservabili diventa l'oggetto fondamentale della teoria, e non l'algebra dei campi, che agisce sulla somma diretta di tutti i settori.

Un altro elemento che punta in questa direzione è un noto risultato di Borchers, secondo cui una data matrice S (che esprime il contenuto fisico di una teoria interagente di scattering) può essere ottenuta da differenti sistemi di campi di Wightman, relativamente locali l'uno rispetto all'altro (una cosiddetta *classe di Borchers* di campi di Wightman). Dunque il contenuto empirico della teoria non è codificato nell'interpretazione delle singole osservabili ma dalla struttura algebrica da esse generata.

Nel caso in cui i settori di superselezione sono tutti dati da *automorfismi* localizzati di \mathcal{A} questa congettura è stata affrontata e risolta già in ([DHR69b]): in questo caso è possibile costruire una rete di campo contenente \mathcal{A} come sottorete di punti fissi sotto l'azione di un gruppo di gauge *abeliano*, il cui duale di Pontrjagin è in corrispondenza 1-1 con i settori.

Che ciò valga anche nel caso generale è suggerito dalla struttura matematica dell'insieme dei settori, essendo l'esempio principale di una categoria tensoriale C^* simmetrica (come quelle che compaiono nella teoria dei settori di superselezione con statistica finita) la categoria $U(G)$ delle rappresentazioni continue unitarie finite-dimensionali di un gruppo compatto G : la struttura tensoriale è data dal prodotto tensoriale di rappresentazioni e operatori di allacciamento, la simmetria dall'operatore che scambia i fattori del prodotto tensoriale, e la coniugazione dalla rappresentazione coniugata. In questa analogia i settori corrispondono alle classi irriducibili, somme dirette a somme dirette, composizione di cariche a prodotti tensoriali, coniugazione di settori particella-antiparticella a coniugazione complessa, l'ordine delle parastatistiche alla dimensione, e il settore di vuoto alla rappresentazione triviale. Inoltre la distinzione para-Bose/para-Fermi dei settori di superselezione corrisponde alla graduazione definita da un elemento centrale, di quadrato l'identità, nel gruppo, che mappa su $\pm I$ in ogni rappresentazione irriducibile.

Come mostrato in ([DR72]), ciò non è un caso: se \mathcal{F} è una rete di campo normale con gruppo di gauge G su \mathcal{A} allora la sottocategoria piena di $\Delta_{\mathcal{F}}$ costituita dai settori di \mathcal{A} che appaiono in $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ è equivalente a $U(G)$, e l'equivalenza è data da un funtore tensoriale simmetrico.

Tuttavia la struttura delle classi di rappresentazioni non è sufficiente a determinare il gruppo (eccetto che nel già citato caso abeliano, grazie alla dualità di Pontrjagin). Piuttosto, si avrebbe bisogno di una collezione di rappresentazioni insieme con gli operatori di allacciamento, ovvero di una categoria di spazi di Hilbert finite-dimensionali che soddisfino adeguate condizioni. In questo caso, il classico Teorema di Tannaka-Krein associa ad una tale categoria un unico gruppo compatto, rappresentato unitariamente sugli spazi dati, e con le frecce date che allacciano queste rappresentazioni. Tuttavia nel

nostro caso il problema di recuperare il gruppo di gauge a partire dagli osservabili locali è al di fuori della portata del Teorema di Tannaka-Krein.

Si é così condotti alla congettura (collegata a quella precedente circa l'esistenza di una rete di campo che descrive la struttura di superselezione in modo da implementare l'invarianza di gauge) che per ogni categoria tensoriale C^* simmetrica con somme dirette, sotto-oggetti, coniugati, e unità irriducibile, esiste un unico gruppo compatto G e un'equivalenza tensoriale simmetrica dalla data categoria ad $U(G)$: in questo caso il gruppo di gauge della teoria è univocamente determinato da Δ_f .

Entrambe queste congetture sono state dimostrate rispettivamente in ([DR90]) e ([DR89b]), facendo ricorso ad una teoria matematica nuova, la teoria astratta della dualità per gruppi compatti, che è delineata in [DR89a],[DR89b].

Ogni categoria astratta con le proprietà sopra citate è precisamente il duale astratto di un unico gruppo compatto ([DR89b]). L'esistenza di coniugati è collegata alla compattezza e la simmetria di permutazione (nel caso di statistiche date dal gruppo di permutazioni ordinario) è collegata alla struttura gruppale: l'eventuale presenza di parastatistiche si manifesta se e solo se il gruppo G è non-abeliano. In modelli 2-dimensionali (3-dimensionali con cariche topologiche) dove il gruppo delle permutazioni è sostituito da quello delle trecce, possono comparire oggetti che non costituiscono un gruppo.

Il risultato chiave della teoria astratta della dualità è la caratterizzazione della sottocategoria piena \mathcal{T} di $End(\mathcal{A})$ (la categoria degli endomorfismi unitali di una C^* -algebra con centro $\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, con frecce gli operatori di allacciamento di \mathcal{A}) che descrive l'azione di un gruppo compatto duale. Il gruppo G è ritrovato attraverso la costruzione di una C^* -algebra "crossed-product" $\mathcal{A} \times \mathcal{T}$ sulla quale G agisce per "azione duale" producendo esattamente tutti gli automorfismi di $\mathcal{A} \times \mathcal{T}$ che lasciano \mathcal{A} puntualmente fisso. Quando \mathcal{A} è l'algebra degli osservabili quasilocali soddisfacente ai suddetti assiomi, e \mathcal{T} descrive la struttura di superselezione, $\mathcal{A} \times \mathcal{T}$ fornisce l'algebra dei campi, e G il gruppo di gauge globale.

Per risultati standard di analisi armonica, G sarà un *gruppo di Lie* se esiste un insieme finito di settori che genera tutti gli altri mediante le operazioni di prendere i coniugati e le componenti irriducibili dei prodotti. G sarà *connesso* se non esiste nessun sottoinsieme finito di settori stabile sotto le suddette operazioni. G sarà *metrizzabile* (o *finito*) se esistono al più una quantità numerabile (o finita) di settori.

Nella trattazione di questi risultati effettuata in [DR90] nessuna assunzione è fatta sullo spettro di particelle o sulla covarianza della teoria. Se si assume la covarianza traslazionale o (come faremo noi) la piena covarianza di Poincaré del settore di vuoto, la costruzione porta ad un'algebra di campo covariante che descrive tutti i settori covarianti.

Per enunciare il risultato di ricostruzione della rete di campo, richiamiamo la nozione di spazio di Hilbert dentro una C^* -algebra unitale \mathcal{B} , cioè è un sottospazio chiuso $H \subseteq \mathcal{B}$ tale che, per ogni $\psi, \varphi \in H$, si ha $\psi^* \varphi \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ e quindi un prodotto scalare su H è dato da:

$$\psi^* \varphi = (\psi | \varphi) \mathbb{1}_{\mathcal{B}}$$

in modo che la norma associata coincide su H con la norma di \mathcal{B} .

Considereremo soltanto spazi di Hilbert finito-dimensionali H . In tal caso, se ψ_j , $j = 1, \dots, d$ è una base ortonormale di H , la proiezione:

$$\mathbb{1}_H := \sum_{j=1,d} \psi_j \psi_j^*$$

è indipendente dalla scelta della base ortonormale, ed è chiamata il **supporto** di H .

Teorema 2.3.1 ([DR90])

Sia $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ una rete locale, Poincaré-covariante, di algebre di von Neumann nella sua rappresentazione del vuoto, e assumiamo che \mathcal{H}_0 sia separabile, e che valgano per \mathcal{A} la dualità di Haag e la proprietà B.

Allora esiste un'unica (a meno di un'opportuna equivalenza unitaria) rete di campo normale, Poincaré-covariante, $(\mathcal{F}, V, k, U_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ su $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ tale che \mathcal{H}_0 è ciclico per ogni $\mathcal{F}(\mathcal{O})$, ed ogni classe di equivalenza di rappresentazioni DHR di \mathcal{A} con statistica finita, Poincaré covarianti, si realizza come sottorappresentazione di $\pi_{\mathcal{F}}$. Inoltre risulta:

- (1) $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})' \cap \mathcal{F} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{I}$
- (2) $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})' = G''$, e:
- (♠) $\pi_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\xi} d_{\xi} \pi_{\xi}$

dove ξ varia nell'insieme dei settori localizzabili covarianti di \mathcal{A} e π_{ξ} è una rappresentazione DHR irriducibile covariante ed a statistica finita di classe ξ su $\mathcal{H}_{\xi} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

(3) c'è una corrispondenza 1-1 tra settori localizzabili covarianti ξ di \mathcal{A} e classi di equivalenza di sottorappresentazioni irriducibili di V definite dal fatto che, corrispondentemente alla (♠):

$$V = \bigoplus_{\xi} u_{\xi} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_{\xi}}$$

è la decomposizione fattoriale di V , essendo u_{ξ} una sottorappresentazione irriducibile di G di dimensione d_{ξ}

(4) la graduazione su \mathcal{H}_0 definita da $V(k)$ corrisponde all'alternativa tra statistica para-Bose e para-Fermi, cioè se $\Phi \in \mathcal{H}_{\xi}$, allora $V(k)\Phi = \pm\Phi$ a seconda che π_{ξ} abbia statistica para-Bose o para-Fermi

(5) per ogni $\rho \in \Delta_C(\mathcal{O})$:

$$H_{\rho} := \{\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) : \psi \pi_{\mathcal{F}}(A) = \pi_{\mathcal{F}}\rho(A)\psi, A \in \mathcal{A}\}$$

è uno spazio di Hilbert $d_{[\rho]}$ -dimensionale, β -invariante, in $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ con supporto \mathbb{I} , e $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ è generata come algebra di von Neumann da H_{ρ} , $\rho \in \Delta_C(\mathcal{O})$

(6) per ρ irriducibile, la rappresentazione u_{ρ} di G indotta da β su H_{ρ} è equivalente a $u_{[\rho]}$

Questo risultato ha il seguente notevole significato fisico: nella teoria locale il principio di invarianza di gauge non è più un assioma ma un teorema.

Dunque, partendo dall'algebra degli osservabili locali, che sono per definizione gauge-invarianti, e che non contengono nessun elemento che anticommute con i suoi traslati spacelike, arriviamo a un gruppo di gauge e a campi che soddisfano le ordinarie regole di commutazione e di anticommutazione, che ammettono gli osservabili locali come elementi gauge-invarianti.

Sussiste anche un analogo risultato nel caso di settori topologici, con la differenza principale che ora le algebre di campo sono indicizzate da coni spacelike piuttosto che da doppi coni.

Teorema 2.3.2 ([DR90])

Sia $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ una rete locale, Poincaré-covariante, di algebre di von Neumann nella sua rappresentazione del vuoto. Assumiamo \mathcal{H}_0 separabile, e che valgano per \mathcal{A} la dualità di Haag e la proprietà B (entrambe per coni spacelike).

Allora esiste un'unica (a meno di un'opportuna equivalenza unitaria) rete di campo normale estesa, Poincaré-covariante, $(\mathcal{F}, V, k, U_{\mathcal{F}}, \pi_{\mathcal{F}})$ su $(\mathcal{A}, U, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ tale che per ogni

classe di equivalenza di “rappresentazioni DHR per coni spacelike” di \mathcal{A} con statistica finita, Poincaré covarianti, si realizza come sottorappresentazione di $\pi_{\mathcal{F}}$. Inoltre risulta:

(1) $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})' \cap \mathcal{F}_D = \mathbb{C} \cdot \mathbb{I}$ dove D è un doppio cono all’infinità spacelike, e \mathcal{F}_D è la C^* -algebra generata da $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, $D(\mathcal{C}) \subseteq D$

(2) $\pi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})' = G''$, e:

$$(\clubsuit) \quad \pi_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\xi} d_{\xi} \pi_{\xi}$$

dove ξ varia nell’insieme dei settori topologici covarianti di \mathcal{A} e π_{ξ} è una rappresentazione irriducibile, covariante, a statistica finita che soddisfa il “criterio DHR per coni spacelike”, di classe ξ su $\mathcal{H}_{\xi} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$

(3) c’è una corrispondenza 1-1 tra settori topologici covarianti ξ di \mathcal{A} e classi di equivalenza di sottorappresentazioni irriducibili di V definite dal fatto che, corrispondentemente alla (\clubsuit):

$$V = \bigoplus_{\xi} u_{\xi} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_{\xi}}$$

è la decomposizione fattoriale di V , essendo u_{ξ} una sottorappresentazione irriducibile di G di dimensione d_{ξ}

(4) la graduazione su \mathcal{H}_0 definita da $V(k)$ corrisponde all’alternativa tra statistica para-Bose e para-Fermi, cioè se $\Phi \in \mathcal{H}_{\xi}$, allora $V(k)\Phi = \pm\Phi$ a seconda che π_{ξ} abbia statistica para-Bose o para-Fermi

(5) per ogni $\rho \in \Delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$:

$$H_{\rho} := \{\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) : \psi \pi_{\mathcal{F}}(A) = \pi_{\mathcal{F}}\rho(A)\psi, A \in \mathcal{A}\}$$

è uno spazio di Hilbert $d_{[\rho]}$ -dimensionale, β -invariante, in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ con supporto \mathbb{I} , e $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ è generata come algebra di von Neumann da H_{ρ} , $\rho \in \Delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$

(6) per ρ irriducibile, la rappresentazione u_{ρ} di G indotta da β su H_{ρ} è equivalente a $u_{[\rho]}$

Un’esposizione della teoria DHR e del teorema di ricostruzione, nel particolare caso “fisico” in cui $G \subseteq SU(d)$, si trova in [Fred95].

Capitolo 3

Implementazione locale di simmetrie e Teorema di Noether quantistico

Tutti i risultati esposti finora vanno in direzione della costruzione di una teoria quantistica alla Heisenberg in cui gli oggetti fondamentali sono gli osservabili locali: quanto segue può essere visto come il coronamento di questo programma.

Una delle caratteristiche generali dei modelli teorici di campo è la comparsa di correnti conservate locali risultanti da simmetrie interne o spaziotemporali. All'interno di una teoria di campo lagrangiana classica questo fatto è ben compreso, e il Teorema di Noether fornisce perfino, per ogni simmetria continua di una lagrangiana, una formula esplicita per la corrente corrispondente $j^\mu = j^\mu(x)$, che è soluzione di un'opportuna equazione di continuità:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

e mediante la quale è possibile risalire per integrazione alle corrispondenti cariche conservate, ovvero alle costanti del moto.

Ad esempio, se la lagrangiana del sistema è invariante per traslazioni temporali allora la costante del moto è l'energia, mentre se è invariante per traslazioni spaziali la costante del moto è l'impulso (quantità di moto, o momento lineare). Infine, all'invarianza per rotazioni della lagrangiana, corrisponde la conservazione del momento angolare totale del sistema.

Nell'approccio lagrangiano alla teoria quantistica dei campi, la comprensione generale della relazione tra simmetrie e correnti è meno soddisfacente. Può succedere, ad esempio, che le simmetrie di una lagrangiana classica scompaiano a livello quantistico a causa degli effetti della rinormalizzazione ([IZ80]). Non è chiaro pertanto come stabilire in questo formalismo una versione effettiva del Teorema di Noether.

Un programma rivolto verso una formulazione quantistica del Teorema di Noether è stato affrontato nel formalismo algebrico, a partire dai primi anni 1980. Questo approccio consiste essenzialmente di due fasi:

(a) nella prima, si determina, per ogni simmetria globale di una teoria quantistica, un'implementazione locale, e con essa un insieme di generatori locali (nel caso di simmetrie continue)

Infatti molte delle quantità considerate nella usuale teoria di superselezione, come ad esempio i rappresentanti $V(g)$ delle simmetrie di gauge, sono di natura globale e i loro generatori hanno dunque il significato di grandezze quali la “carica totale dell’universo”.

Si noti che in presenza di correnti di Noether tali generatori possono essere ottenuti integrando le densità di corrente (regolarizzate) su volumi finiti di spazio. Così la soluzione a questo parziale problema (trovata in [Dop82],[DL83]) può essere interpretata come una versione debole del Teorema di Noether.

L’implementazione locale di simmetrie ha permesso anche di risolvere il problema della determinazione locale della struttura di superselezione: come vedremo, attraverso l’implementazione locale di simmetrie è possibile risalire alla struttura di superselezione a partire unicamente dagli osservabili locali, ovvero le uniche quantità accessibili all’esperimento (coerentemente con ciò che accade abitualmente in laboratorio).

Inoltre, nel caso di simmetrie continue, i generatori locali forniscono una cosiddetta “algebra locale delle correnti”, il cui confronto con l’ordinaria “ipotesi dell’algebra delle correnti” formulata in termini di campi di Wightman, presenta alcune difficoltà.

Infine, è possibile dimostrare che sotto opportune ipotesi i generatori locali convergono a quelli globali quando le regioni di localizzazione tendono a tutto lo spazio.

(b) il secondo passo consiste nella ricostruzione delle correnti conservate a partire dai generatori locali (densità integrate)

Il principale strumento tecnico utilizzato in queste analisi è un limite di scala dei generatori locali che assume pertanto il significato di “densità” per tali generatori, ovvero di corrente conservata. Tramite le componenti tempo di queste correnti è possibile risalire alle relative cariche di superselezione locali e globali, e dunque tale risultato si può interpretare come un Teorema di Noether quantistico completo. Una soluzione di questo secondo problema è nota per ora soltanto in alcuni casi particolari ([Carp98]).

3.1 Proprietà split e costruzione della mappa localizzante

Consideriamo una mappa canonica $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{O})$ di algebre di campo locali. Siano inoltre $\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{O}}$ doppi coni tali che $\mathcal{O} \Subset \widehat{\mathcal{O}}$, cioè \mathcal{O} è contenuto strettamente nell’interno di $\widehat{\mathcal{O}}$:

- (i) supponiamo che il vuoto Ω sia ciclico e separante per $\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$, e $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$
- (ii) assumiamo la **proprietà split**, cioè l’esistenza di un fattore di tipo I \mathcal{N} tale che $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$

Si sa ([Dop82],[DL83],[DL84]) che le ipotesi ordinarie di una teoria di campo e le relazioni di commutazione normali più la proprietà split implicano la (i): infatti per il Teorema di Reeh-Schlieder segue che Ω è ciclico e separante per $\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$, mentre usando anche la proprietà split si ha il risultato per $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$. Dunque nelle situazioni usuali basta supporre la validità della proprietà split.

Una terna $\Lambda := (\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}), \Omega)$ si dice **inclusione split standard**. Le inclusioni split standard compaiono naturalmente nella teoria modulare di Tomita-Takesaki; le loro proprietà matematiche sono esposte in [DL84].

Tramite la proprietà split è possibile dimostrare l'esistenza di stati prodotto con specifiche proprietà, il che verrà usato nella nostra analisi successiva.

Sia $\Lambda = (\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}), \Omega)$ un'inclusione split standard su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , ω lo stato indotto dal vettore Ω , e ω_ξ quello indotto da ξ . Osserviamo che poichè \mathcal{N} è un fattore di tipo I è isomorfo, come algebra di von Neumann, all'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, e dunque anche a $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I}$. Inoltre poichè Ω è ciclico per $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ e separante per $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$, è ciclico e separante per \mathcal{N} .

Condideriamo il vettore:

$$\psi = \sum_k \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \psi_k \otimes \psi_k$$

dove $\{\psi_k\}$ è una base ortonormale completa per \mathcal{H} .

Il vettore ψ è ciclico e separante per $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I}$. Infatti per ogni $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ abbiamo:

$$\|T \otimes \mathbb{I}\psi\|^2 = \sum_k \frac{1}{2^k} \|T\psi_k\|^2 = \|\mathbb{I}\psi \otimes T\|^2$$

L'uguaglianza $\|T \otimes \mathbb{I}\psi\| = 0 = \|\mathbb{I}\psi \otimes T\|$ implica che $\|T\psi_k\| = 0$ per ogni k , dunque $T = 0$. Quindi ψ è separante per $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I}$ e $\mathbb{I} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) = (\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I})'$.

Ne segue che esiste un unitario W tale che:

$$\mathcal{N} = W^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I})W$$

Dalla proprietà split segue che $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \subseteq W^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I})W$, dunque:

$$W\mathcal{F}(\mathcal{O})W^{-1} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I}$$

Inoltre $W^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I})W \subseteq \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$, dunque $(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I}) \subseteq W\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})W^{-1}$, per cui:

$$W\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})W^{-1} \subseteq (\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I})' = \mathbb{I} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Esistono allora due rappresentazioni fedeli e normali di $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ e $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ (rispettivamente π e π') tali che:

$$W\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'W^{-1} = \pi(\mathcal{F}(\mathcal{O})) \otimes \pi'(\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})')$$

dove $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ indica l'algebra di von Neumann generata da $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ e $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$.

Quindi esiste un isomorfismo Φ di $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ su $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ tale che:

$$\Phi(F_1) = F \otimes \mathbb{I} \text{ per } F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

$$\Phi(\widehat{F}) = \mathbb{I} \otimes \widehat{F} \text{ per } \widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$$

L'espressione:

$$\phi(\cdot) := (\Omega \otimes \Omega, \Phi(\cdot)(\Omega \otimes \Omega))$$

definisce allora uno stato su $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$, che è normale e fedele perchè $\Omega \otimes \Omega$ è ciclico per $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}) = (\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})')'$.

Evidentemente, se $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ e $\widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ risulta:

$$\phi(F\widehat{F}) = \omega(F)\omega(\widehat{F})$$

Lo stato ϕ è detto pertanto **stato prodotto**, ed è definito univocamente dalla terna split Λ : se ϕ' è un altro stato normale di $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ che soddisfa la definizione di stato prodotto, esso deve per continuità coincidere con ϕ .

Ricordiamo (per la teoria modulare di Tomita-Takesaki si veda [Haag96],[Pand00]) che a ogni stato normale η su un'algebra di von Neumann \mathcal{R} è associato un unico vettore ψ_η appartenente al **cono naturale**:

$$\mathcal{P}_\Omega^{\natural}(\mathcal{R}) = \overline{\Delta^{\frac{1}{4}}\mathcal{R}_+\Omega} \quad (\Delta \text{ è l'operatore modulare dell'algebra } \mathcal{R} \text{ definito da } \Omega)$$

tale che:

$$\eta(F) = (\psi_\eta, F\psi_\eta) \quad \forall F \in \mathcal{R}$$

Inoltre un vettore nel cono $\mathcal{P}_\Omega^{\natural}(\mathcal{R})$ è ciclico per \mathcal{R} se e solo se è separante per \mathcal{R} stessa.

Indichiamo con Ω_Λ il vettore del cono naturale $\mathcal{P}_\Omega^{\natural}(\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})')$ associato allo stato ϕ . Risulta ([DL83]) che:

(1) Ω_Λ induce su $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ lo stato prodotto:

$$\phi(F\widehat{F}) = (\Omega_\Lambda, F\widehat{F}\Omega_\Lambda) = (\Omega, F\Omega)(\Omega, \widehat{F}\Omega) \quad F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}), \widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$$

(2) Ω_Λ è ciclico per l'algebra di von Neumann $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$ poichè lo stato ϕ è fedele

Il vettore Ω_Λ è completamente determinato da queste proprietà, sicchè dipende solo dalla terna $\Lambda := (\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}), \Omega)$.

Inoltre l'assegnazione $\Lambda \mapsto \Omega_\Lambda$ è covariante, nel senso che se $\Lambda = (\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}), \Omega)$ e $\Lambda_0 = (\mathcal{F}(\mathcal{O}_0), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}_0), \Omega_0)$ sono tali che:

$$\Lambda = (U_0\mathcal{F}(\mathcal{O})U_0^{-1}, U_0\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})U_0^{-1}, U_0\Omega)$$

per qualche U_0 operatore unitario su \mathcal{H} , allora tra i vettori Ω_Λ e Ω_{Λ_0} sussiste la relazione:

$$\Omega_{\Lambda_0} = U_0\Omega_\Lambda$$

Supponiamo ora che U_0 sia una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo di gauge globale della teoria G , tale che:

$$U_0(g)\mathcal{F}(\mathcal{O})U_0(g)^{-1} = \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

e:

$$U_0(g)\Omega = \Omega$$

In tal caso si ottiene $\Lambda_0 = \Lambda$, e dunque $\Omega_{\Lambda_0} = \Omega_\Lambda$: questo implica che Ω_Λ è invariante sotto l'azione di U_0 .

Definiamo a questo punto una mappa W_Λ da \mathcal{H} in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ ponendo:

$$W_\Lambda F\widehat{F}\Omega_\Lambda := F\Omega\widehat{F}\Omega \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}), \widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$$

Grazie alla relazione:

$$\phi(F\widehat{F}) = (\Omega_\Lambda, F\widehat{F}\Omega_\Lambda) = (\Omega, F\Omega)(\Omega, \widehat{F}\Omega)$$

e alla ciclicità di Ω_Λ e Ω segue che dominio e immagine dell'applicazione sono densi.

Possiamo riformulare la definizione di W_Λ come:

$$W_\Lambda F\widehat{F} = (F \otimes \widehat{F})W_\Lambda \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}), \widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})' \quad (*)$$

E' allora naturale definire una mappa (che sarà uno *-isomorfismo):

$$\Psi_\Lambda(T) := W_\Lambda^{-1}(T \otimes \mathbb{I})W_\Lambda \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Osservando che $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{I} \subseteq (\mathbb{I} \otimes \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})')'$ e $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'' = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$ otteniamo, per ogni $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})'$:

$$\begin{aligned} \Psi_\Lambda(T)\widehat{F} &= (W_\Lambda^{-1}(T \otimes \mathbb{I})W_\Lambda)(W_\Lambda^{-1}(\mathbb{I} \otimes \widehat{F})W_\Lambda) = W_\Lambda^{-1}(T \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \widehat{F})W_\Lambda \\ &= W_\Lambda^{-1}(\mathbb{I} \otimes \widehat{F})(T \otimes \mathbb{I})W_\Lambda = (W_\Lambda^{-1}(\mathbb{I} \otimes \widehat{F})W_\Lambda)(W_\Lambda^{-1}(T \otimes \mathbb{I})W_\Lambda) = \widehat{F}\Psi_\Lambda(T) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\Psi_\Lambda(T) \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}) \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (**)$$

Dalla (*) segue infine che:

$$\Psi_\Lambda(F) = F \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) \quad (***)$$

In virtù della proprietà (**) la Ψ_Λ è detta **mappa localizzante** e, come il vettore Ω_Λ , è canonicamente associata all'inclusione Λ .

Inoltre, considerando il fattore di tipo I:

$$\mathcal{N}_\Lambda := \Psi_\Lambda(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

e ricordando la definizione di Ψ_Λ , otteniamo:

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{N}_\Lambda \subseteq \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$$

Dunque l'esistenza di un vettore Ω_Λ con le proprietà viste, e dunque dello stato vettoriale prodotto indotto da Ω_Λ (il che esprime una forma forte di *indipendenza statistica*

tra le regioni \mathcal{O} e $\widehat{\mathcal{O}}'$ - vedi Cap.1.3.2) é equivalente alla proprietà split. Sul significato fisico della proprietà split torneremo più avanti.

Restano da determinare le proprietà di trasformazione della mappa localizzante Ψ_Λ . Esse discendono direttamente dalla covarianza del vettore Ω_Λ :

$$\begin{aligned} W_{\Lambda_0} U_0 F \widehat{F} \Omega_\Lambda &= W_{\Lambda_0} U_0 F U_0^{-1} U_0 \widehat{F} U_0^{-1} \Omega_{\Lambda_0} = U_0 F U_0^{-1} \Omega \otimes U_0 \widehat{F} U_0^{-1} \Omega = \\ &= U_0 \otimes U_0 F \Omega \otimes \widehat{F} \Omega = U_0 \otimes U_0 W_{\Lambda_0} F \widehat{F} \Omega_\Lambda \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}), \widehat{F} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})' \end{aligned}$$

dove naturalmente U_0 è l'unitario che implementa l'isomorfismo tra Λ e Λ_0 . E' allora immediato dedurre l'identità:

$$W_{\Lambda_0} U_0 = (U_0 \otimes U_0) W_\Lambda$$

dalla quale, ricordando la definizione della mappa localizzante, segue:

$$\Psi_\Lambda(U_0^{-1} T U_0) = U_0^{-1} \Psi_\Lambda(T) U_0 \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

che fornisce la legge di covarianza ricercata.

Supponiamo, di nuovo, che U_0 sia una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo di gauge G : in tal caso come sappiamo si ottiene $\Lambda_0 = \Lambda$; inoltre dalla legge di covarianza segue in particolare che Ψ_Λ commuta con le trasformazioni di gauge. Detto questo possiamo passare ad occuparci dell'implementazione locale delle simmetrie.

3.2 Implementazione locale di simmetrie

Vediamo come tramite mappa localizzante costruita grazie alla proprietà split è possibile effettuare un'implementazione locale delle trasformazioni di simmetria. Tratteremo due casi: quello delle simmetrie di gauge (simmetrie interne), con un riferimento esplicito al caso in cui il gruppo è abeliano, e quello delle simmetrie spazio-temporali (simmetrie geometriche). Infine discuteremo un argomento di implementazione locale della struttura di superselezione stessa.

3.2.1 Simmetrie interne

Consideriamo il gruppo di gauge G della teoria in considerazione e supponiamo che esista una rappresentazione fortemente continua U di G tale che:

$$U(g) \mathcal{F}(\mathcal{O}) U(g)^{-1} = \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

e:

$$U(g) \Omega = \Omega$$

per ogni doppio cono \mathcal{O} e $g \in G$ (questo è un esempio di una simmetria interna "non rotta").

Se la terna $\Lambda = (\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}), \Omega)$ soddisfa le proprietà (i) e (ii) introdotte al principio, definendo:

$$U_\Lambda(g) := \Psi_\Lambda(U(g))$$

otteniamo una nuova rappresentazione del gruppo G realizzata da operatori unitari appartenenti (come è chiaro dalla (**)) vista in precedenza) all'algebra di von Neumann $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$. Infatti:

$$U_\Lambda(g) U_\Lambda(g') = \Psi_\Lambda(U(g)) \Psi_\Lambda(U(g')) = \Psi_\Lambda(U(g) U(g')) = \Psi_\Lambda(U(gg')) = U_\Lambda(gg')$$

per ogni $g, g' \in G$.

Dalla relazione (***), dalla legge di covarianza, e dall'identità $\Lambda_g = \Lambda$ (indichiamo con Λ_g l'immagine della terna Λ attraverso la trasformazione indotta da U_g) si deduce:

$$U_\Lambda(g) F U_\Lambda(g)^{-1} = \Psi_\Lambda(U(g) F U(g)^{-1}) = U(g) F U(g)^{-1} \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) \quad (***)_1$$

e:

$$U(h)U_\Lambda(g)U(h)^{-1} = U_\Lambda(g)(hgh^{-1}) \quad \forall g, h \in G \quad (***)_2$$

Gli operatori $U_\Lambda(g)$ inducono dunque la stessa azione degli operatori globali $U(g)$ sugli elementi dell'algebra $\mathcal{F}(\mathcal{O})$, implementando localmente la simmetria realizzata da questi ultimi, e godono inoltre delle medesime proprietà di trasformazione.

Dalla (***)₂ segue infine che, se $\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}(\mathcal{O}) \cap U(G)'$ e $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}}) = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}) \cap U(G)'$ sono rispettivamente le algebre degli osservabili associati alle regioni \mathcal{O} e $\widehat{\mathcal{O}}$, il centro \mathcal{B} dell'algebra di von Neumann generata dagli U_Λ appartiene al commutante relativo $\mathcal{A}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ e cosituisce quindi un'algebra di osservabili compatibili la cui misura determina i numeri quantici associati ai settori di superselezione in \mathcal{O} con un'osservazione in $\widehat{\mathcal{O}}$ (sull'implementazione locale delle regole di superselezione torneremo in seguito).

Consideriamo il caso in cui G è abeliano. Nella decomposizione spettrale:

$$U_\Lambda(g) = \sum_{\xi \in \hat{G}} \langle \xi, g \rangle E_\xi \quad (\hat{G} \text{ indica il duale di } G)$$

dove $E_\xi \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ è diverso da zero per ogni ξ ed esprime le proprietà locali di uno stato in \mathcal{O} avente carica ξ . Ricordando che il duale di un gruppo compatto è un gruppo discreto, se \hat{G} ha un numero finito di generatori indipendenti $\eta_1, \dots, \eta_q, \xi_1, \dots, \xi_p$, con $\eta_i^{\nu_i} = e$ e ξ_i aperiodici, allora la corrispondenza:

$$(m_1, \dots, m_q, n_1, \dots, n_p) \mapsto \eta_1^{m_1} \dots \eta_q^{m_q} \xi_1^{n_1} \dots \xi_p^{n_p}$$

è un isomorfismo di $\mathbb{Z}_{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\nu_q} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ su \hat{G} , e dunque:

$$G \sim \mathbb{Z}_{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\nu_q} \times \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$$

dove \mathbb{T} è la circonferenza $[0, 2\pi)$.

Possiamo quindi scrivere (indicando con ϵ_i la prima radice ν_i -esima dell'unità, e con $\xi \sim (m_1, \dots, m_q, n_1, \dots, n_p)$, $g \sim (m'_1, \dots, m'_q, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p})$):

$$\langle \xi, g \rangle = \epsilon_1^{m_1 m'_1} \dots \epsilon_q^{m_q m'_q} e^{i n_1 \theta_1} \dots e^{i n_p \theta_p}$$

ovvero:

$$U_\Lambda(g) = C_1^{m_1} \dots C_q^{m_q} e^{i J_1^\Lambda \theta_1} \dots e^{i J_p^\Lambda \theta_p}$$

Gli operatori C_i sono unitari tali che $C_i^{\nu_i} = \mathbb{I}$, mentre i J_i^Λ sono operatori hermitiani non limitati le cui proprietà saranno discusse più dettagliatamente in seguito.

Osserviamo per ora che appartengono tutti a $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$. Inoltre le espressioni ottenute ci dicono che le η_i sono cariche locali moltiplicative, mentre le ξ_i sono additive.

3.2.2 Simmetrie geometriche

La costruzione precedente può essere applicata anche al caso di simmetrie spazio-temporali, ma in questo caso le loro rappresentazioni cambiano le regioni di localizzazione degli operatori di campo quindi ci si dovrà attendere un'implementazione locale limitata ad elementi abbastanza vicini all'identità del gruppo considerato.

Sia \mathcal{G} un gruppo di simmetrie geometriche (ad esempio il gruppo delle traslazioni \mathbb{R}^4 o il gruppo di Poincaré \mathcal{P}) la cui azione sui punti dello spazio-tempo x è espressa da $x \mapsto hx$, $h \in \mathcal{G}$.

Come al solito assumeremo l'esistenza di una rappresentazione unitaria fortemente continua V di \mathcal{G} su \mathcal{H} tale che:

$$V(h)\mathcal{F}(\mathcal{O})V(h)^{-1} = \mathcal{F}(h\mathcal{O})$$

e:

$$V(h)\Omega = \Omega$$

Come nel caso delle simmetrie interne possiamo definire:

$$V_\Lambda(h) := \Psi_\Lambda(V(h)) \quad (\times)$$

ma chiaramente la relazione $(****)_1$ non sarà più valida in generale.

Consideriamo allora un doppio cono \mathcal{O}_0 tale che $\mathcal{O}_0 \in \mathcal{O}$ e un intorno \mathcal{G}_0 dell'identità di \mathcal{G} tale che $\mathcal{G}_0\mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O}$.

Per $F_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_0)$ e $h_0 \in \mathcal{G}_0$ otteniamo:

$$V_\Lambda(h_0)F_0V_\Lambda(h_0)^{-1} = \Psi_\Lambda(V(h_0)F_0V(h_0)^{-1}) = V(h_0)F_0V(h_0)^{-1}$$

Restano da determinare le leggi di trasformazione dell'implementazione locale V_Λ sotto l'azione delle simmetrie spazio-temporali globali. Come nel caso precedente, queste possono essere dedotte direttamente dalla legge di covarianza già trovata, ricordando che gli unitari $V(h)$ inducono un isomorfismo della terna $\Lambda = (\mathcal{F}(\mathcal{O}), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}}), \Omega)$ sulla terna $\Lambda_h = (\mathcal{F}(h\mathcal{O}), \mathcal{F}(h\hat{\mathcal{O}}), \Omega)$. Otteniamo dunque:

$$V(h)V_\Lambda(g)V(h)^{-1} = V_{\Lambda_h}(hgh^{-1}) \quad g, h \in \mathcal{G}_0$$

Un risultato analogo vale per la trasformazione indotta dagli unitari V sull'implementazione locale di eventuali simmetrie interne U_Λ :

$$V(h)U_\Lambda(g)V(h)^{-1} = U_{\Lambda_g}(hgh^{-1}) \quad g \in G, h \in \mathcal{G}_0$$

Perchè l'implementazione locale possa essere considerata soddisfacente, resta da verificare che gli unitari in questione siano osservabili nel caso in cui i loro analoghi globali godano di questa proprietà. La risposta è affermativa. Supponiamo infatti che:

$$U(g)V(h)U(g)^{-1} = V(h) \quad \forall g \in G, \forall h \in \mathcal{G}$$

Si deduce immediatamente dalla legge di covarianza della mappa localizzante che:

$$U(g)V_\Lambda(h)U(g)^{-1} = V_\Lambda(h) \quad \forall g \in G, \forall h \in \mathcal{G}_0$$

Possiamo concludere dunque che:

$$V_\Lambda(h) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}}) \cap U(G)' = \mathcal{A}(\hat{\mathcal{O}}) \quad (\times \times)$$

3.2.3 Aspetti locali delle regole di superselezione

Secondo la sua definizione di base una regola di superselezione è semplicemente un'etichetta di classi di equivalenza di rappresentazioni irriducibili dell'algebra degli osservabili \mathcal{A} . Nella nostra analisi queste rappresentazioni possono essere ottenute restringendo \mathcal{A} ai sottospazi coerenti di \mathcal{H} (settori di superselezione), e le regole di superselezione (*cariche globali*) si possono identificare con gli elementi del centro di \mathcal{A}'' . Tutti questi concetti sono di natura globale e comportano osservazioni a distanze arbitrariamente grandi. In pratica, tuttavia, le regole di superselezione sono osservate entro i confini di un laboratorio. Dunque sorge la questione di come la struttura di superselezione si manifesta localmente nel nostro quadro teorico.

Se le cariche globali sono date esplicitamente come operatori che agiscono su \mathcal{H} , allora una risposta può essere ottenuta da [Dop82],[DL83] così come dalla discussione precedente: grazie alla mappa localizzante Ψ_Λ si possono costruire dalle cariche globali una famiglia di osservabili che commutano, localizzati in $\hat{\mathcal{O}}$, e misurare le cariche contenute in \mathcal{O} , ma questo risultato non è ancora completamente soddisfacente in quanto fa uso di una conoscenza a priori della struttura di superselezione.

Non insistendo nell'indicare osservabili specifici che misurano le cariche in una regione data, si può dare una risposta concettualmente più soddisfacente. Vedremo che la struttura di superselezione di una teoria può essere completamente ritrovata all'interno di regioni spazio-temporali limitate, se si conosce la "corretta" hamiltoniana locale. Per semplicità

assumeremo che il net di algebre locali \mathcal{A} abbia la proprietà di additività: sotto questa ipotesi, che richiama le proprietà locali dei campi di Wightman, si può determinare la struttura di superselezione anche all'interno di una regione limitata fissata.

Consideriamo teorie con cariche localizzabili; sia $V(t)$, $t \in \mathbb{R}$ una rappresentazione della traslazione temporale globale, e sia $V_\Lambda(t)$ la sua implementazione locale, allora il generatore di $V_\Lambda(t)$ è l'hamiltoniana locale H_Λ . Consideriamo l'algebra di von Neumann \mathcal{R} generata da $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ e da H_Λ :

$$\mathcal{R} = \mathcal{A}(\mathcal{O}) \vee H_\Lambda''$$

Tenendo conto che Ψ_Λ agisce trivialmente su $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ ed è normale (ultradebolmente continuo) su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si ottiene:

$$\mathcal{R} \supseteq \bigvee_{t \in \mathbb{R}} V_\Lambda(t) \mathcal{A}(\mathcal{O}) V_\Lambda(t)^{-1} = \Psi_\Lambda \left(\bigvee_{t \in \mathbb{R}} V(t) \mathcal{A}(\mathcal{O}) V(t)^{-1} \right)$$

Ora, come conseguenza della condizione spettrale relativistica e della proprietà di additività, l'algebra di von Neumann generata dalle algebre traslate nel tempo $V(t) \mathcal{A}(\mathcal{O}) V(t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$ è \mathcal{A}'' ([Bor61]), sicché $\mathcal{R} \supseteq \Psi_\Lambda(\mathcal{A}'')$. D'altro canto, se si assume che l'energia totale H sia un osservabile (tale ipotesi è lecita, per la condizione spettrale), cioè $V(t) \in \mathcal{A}''$, segue che $\mathcal{R} \subseteq \Psi_\Lambda(\mathcal{A}'')$, e pertanto:

$$\mathcal{R} = \Psi_\Lambda(\mathcal{A}'')$$

Ne segue che, in particolare, il centro di \mathcal{R} è isomorfo al centro di \mathcal{A}'' .

Questo risultato significa, dal punto di vista fisico, che combinando misurazioni dell'energia locale ed osservazioni in \mathcal{O} si arriva ad uno specifico insieme di osservabili (corrispondente al centro di \mathcal{R}) che sono misurabili simultaneamente con tutti gli altri osservabili di questo tipo. Dallo spettro di questi specifici osservabili si può risalire alla struttura di superselezione.

E' possibile effettuare una discussione analoga per cariche topologiche e forze a lungo range ([BDL86]).

3.3 Significato fisico della proprietà split

La proprietà split ha un ruolo cruciale nella costruzione di trasformazioni locali di simmetria, tuttavia la sua validità in modelli realistici, e il suo significato fisico diretto, non sono evidenti.

Innanzitutto le inclusioni split standard agiscono su spazi di Hilbert separabili, il che implica che esista al più una quantità numerabile di settori di superselezione.

La proprietà split è stata verificata direttamente da Buchholz ([Buc74]) nel caso del campo libero scalare e il suo argomento può essere applicato anche a modelli interagenti come $P(\phi)_2$ e Yukawa₂ ([Sum82],[DAL83]). Si noti tuttavia che essa è indipendente dagli ordinari assiomi di Haag-Kastler o Wightman. Questi ultimi sono infatti verificati da modelli non fisici come il campo libero generalizzato con misura di Kallen-Lehmann continua (che non ammette un'interpretazione in termini di particelle) o prodotti tensoriali infiniti di teorie libere ([DL84]) (per cui non valgono le ordinarie relazioni tra spin e statistica).

La loro caratteristica comune è che descrivono sistemi con un numero enorme di gradi di libertà locali, tale da rendere impossibile la costruzione di ragionevoli stati di equilibrio termodinamico. Questa è un'osservazione di grande importanza. E' stato infatti dimostrato, prima da Buchholz e Wichmann ([BW86]), poi da Buchholz, D'Antoni e Fredenhagen ([BDAF87]) che la proprietà split è conseguenza della cosiddetta **condizione**

di nuclearità, che esprime una limitazione del numero di questi gradi di libertà (e dunque l'esistenza di stati di equilibrio termodinamico e di un'interpretazione in termini di particelle) attraverso il controllo della crescita della densità dei livelli energetici all'aumentare dell'energia stessa. Ad esempio, ricordando che gli stati di particella sono autostati dell'operatore di massa (la massa di una particella è un punto isolato nello spettro di massa), nel caso del campo libero (anche a massa nulla) la condizione di nuclearità è soddisfatta se e solo se lo spettro di massa delle particelle soddisfa:

$$\sum f_i e^{-\beta m_i} < \infty \quad \forall \beta > 0$$

dove f_i è la molteplicità della massa m_i , compreso un fattore $(2s+1)$ relativo allo spin (vedi teoria di Wigner). Tale condizione è soddisfatta nella maggior parte dei modelli di interesse fisico.

Per quanto riguarda il significato fisico della proprietà split, osserviamo che le algebre locali $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ non sono (non si decompongono in) fattori di tipo I, ovvero non sono isomorfe all'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{O}})$ degli operatori lineari limitati su un opportuno spazio di Hilbert (o a somme dirette di tali algebre). E' questa in ultima analisi la ragione per cui non è possibile definire un sottospazio lineare $\mathcal{H}_{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{H}$ corrispondente a "stati localizzati" nella regione \mathcal{O} . Non stupisce tuttavia che sia possibile verificare un naturale indebolimento di questa richiesta, come l'esistenza di un fattore di tipo I contenente $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ per ogni regione \mathcal{O} limitata (e contenuto in $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$ per $\mathcal{O} \Subset \widehat{\mathcal{O}}$), a partire dalla constatazione della possibilità di fissare localmente situazioni fisiche ben determinate.

Come ora vedremo la proprietà split può basarsi sul fatto sperimentale che è possibile fissare localmente certe specifiche situazioni fisiche (ad esempio il vuoto) senza tener conto delle condizioni iniziali date del mondo esterno.

Secondo i principi fondamentali della Meccanica Quantistica ogni stato fisico corrisponde ad un funzionale lineare positivo ϕ sull'algebra degli osservabili \mathcal{A} , che permette di ottenere il valor medio degli osservabili nello stato in questione. Consideriamo un esperimento sì-no (corrispondente ad un proiettore $E \in \mathcal{A}$). E' possibile ottenere da ϕ un nuovo stato ϕ_E eliminando tutti gli eventi nei quali il risultato della misura di E è zero. Questo stato è dato da:

$$\phi_E(A) = \frac{\phi(EAE)}{\phi(E)} \quad A \in \mathcal{A}$$

con $\phi(E) \neq 0$.

Un proiettore E è detto un **filtro puro** (o **ideale**) se per ogni ϕ con $\phi(E) \neq 0$ si ha $\phi_E = \omega$ per un fissato ω indipendente da ϕ . Segue subito che ω è uno stato puro, ovvero che misurando E si ottengono stati con un'informazione massimale. I filtri puri sono familiari in situazioni con un numero finito di gradi di libertà.

Nel contesto della teoria dei campi un filtro puro non può al contrario essere un'osservabile (locale) perchè agisce in maniera identica su stati localizzati in regioni arbitrariamente distanti.

A questo punto un più attento riferimento a situazioni sperimentali realistiche assume un'importanza cruciale. I filtri puri non vengono misurati: in pratica si ha la possibilità di fissare stati solo all'interno di regioni spaziotemporali limitate. E' un importante fatto empirico che questo può essere ottenuto mediante un setup sperimentale in cui entrano solo parametri degli stati in questione. In altri termini con opportuni esperimenti di monitoraggio si può stabilire uno stato definito dentro una data regione, non tenendo conto dei dettagli complicati e sconosciuti del resto del mondo. Così, localmente, tali esperimenti hanno lo stesso effetto di un filtro puro. In altre parole l'indipendenza dal

mondo esterno degli stati prodotti in laboratorio impone di considerare misurazioni che abbiano lo stesso effetto di un filtro puro, ma solo localmente.

Queste considerazioni conducono all'introduzione del concetto di filtro locale: un proiettore $E \in \mathcal{A}$ è detto un **filtro locale** per ω nella regione \mathcal{O} se per ogni ϕ di \mathcal{A} tale che $\phi(E) \neq 0$ gli stati ridotti ϕ_E coincidono con ω sull'algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, ossia se:

$$\phi_E(A) = \frac{\phi(EAE)}{\phi(E)} \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

per ogni ϕ di \mathcal{A} tale che $\phi(E) \neq 0$.

E' naturale supporre che in una teoria realistica debbono esistere di questi filtri; in realtà come ora vediamo questa condizione implica la proprietà di split.

Proposizione 3.3.1 *L'algebra delle osservabili $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$ di una teoria di campo locale possiede la proprietà di split se e solo se esistono filtri locali per ogni regione limitata dello spazio-tempo.*

Dim.

\implies : Se una teoria possiede la proprietà split, per ogni regione limitata \mathcal{O} esiste un fattore di tipo I, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$, tale che $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$, $\mathcal{O} \Subset \widehat{\mathcal{O}}$.

Poichè un proiettore minimale $E \in \mathcal{N}$ ha (relativamente ad \mathcal{N}) le stesse proprietà algebriche di un proiettore unidimensionale su uno spazio di Hilbert, chiaramente si ha:

$$EAE = \omega(A)E \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

dove ω è uno stato dipendente da E . Per ogni stato ϕ con $\phi(E) \neq 0$ si ottiene pertanto:

$$\phi_E(A) = \frac{\phi(EAE)}{\phi(E)} = \omega(A) \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

Quindi $E \in \widehat{\mathcal{O}}$ è un filtro locale per ω nella regione \mathcal{O} .

Inoltre si può dimostrare che scegliendo differenti proiettori minimali di \mathcal{N} è possibile ottenere filtri locali per ogni stato normale di $\mathcal{A}(\mathcal{O})$.

\impliedby : Supponiamo viceversa che $E \in \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$ sia un filtro locale per uno stato ω su $\mathcal{A}(\mathcal{O})$. Gli stati fisici separano gli elementi di \mathcal{A} e dunque la relazione:

$$\phi(EAE) = \omega(A)\phi(E) \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

implica:

$$EAE = \omega(A)E \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \quad (+)$$

Indichiamo con \mathcal{R} l'algebra di von Neumann generata da E e da $\mathcal{A}(\mathcal{O})$. Evidentemente: $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$

e, come segue dalla (+):

$$ER E = \mathbb{C}E$$

Il proiettore E è dunque minimale per \mathcal{R} .

Consideriamo ora il **supporto centrale** F di E (il più piccolo proiettore del centro di \mathcal{R} contenente E). L'algebra ridotta $\mathcal{R}_F = F\mathcal{R}F$ è un fattore di tipo I su $F\mathcal{H}$ e, per costruzione:

$$\mathcal{A}(\mathcal{O})F \subseteq \mathcal{R}_F \subseteq \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}}) \quad (++)$$

Considerando a questo punto una qualunque isometria W di \mathcal{H} su $F\mathcal{H}$ è immediato verificare che l'algebra di von Neumann $\mathcal{M} = W^*\mathcal{R}_F W$ su \mathcal{H} è un fattore di tipo I.

Inoltre Borchers ha dimostrato che, come conseguenza del Teorema di Reeh-Schlieder e del fatto che $F \in \mathcal{A}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}})$, esiste una tale isometria in $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)' \cap \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}}_1)$, se $\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}$ e $\widehat{\mathcal{O}} \Subset \widehat{\mathcal{O}}_1$.

Dunque sostituendo le regioni \mathcal{O} e $\widehat{\mathcal{O}}$ con \mathcal{O}_1 e $\widehat{\mathcal{O}}_1$ in (++), e moltiplicando la relazione ottenuta per W^* a sinistra e per W a destra, si giunge finalmente all'inclusione:

$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}(\widehat{\mathcal{O}}_1)$
 con \mathcal{M} fattore di tipo I. ■

Concludiamo questa sezione notando che per la costruzione delle correnti locali ci siamo serviti della proprietà di split dell'algebra dei campi. Ricordando la $(\times \times)$, appare ragionevole che da questa segua la validità della proprietà di split anche per l'algebra degli osservabili ([Dop82]).

Viceversa, resta aperta la questione se dalla proprietà split per l'algebra delle osservabili possa dedursi l'analoga proprietà per l'algebra dei campi. La validità di questa implicazione inversa è stata dimostrata da Doplicher in [Dop82] nel caso di teorie con gruppo di gauge finito e abeliano.

3.4 Algebra locale delle correnti

Quanto illustrato nella sezione dedicata alle simmetrie interne permette, nel caso in cui esse siano continue, una discussione del problema della costruzione di un'algebra locale delle correnti. In questo caso faremo dunque l'ipotesi che il gruppo di gauge G sia un gruppo di Lie (è il contesto in cui si applica il Teorema di Noether), il che come abbiamo osservato non è restrittivo all'interno della teoria quantistica locale.

Siano $U(g)$ una rappresentazione unitaria di G su \mathcal{H} , \tilde{G} il rivestimento universale della componente connessa dell'identità G_0 di G , σ l'omomorfismo canonico di \tilde{G} in G , $L(G)$ l'algebra di Lie di G , $[u, v]$ il bracket di due elementi $u, v \in L(G)$, $u \in L(G) \mapsto g(u) \in L(G)$ l'automorfismo (rappresentazione regolare) di $L(G)$. Un elemento $u \in L(G)$ agisce sulle algebre $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ come una derivazione non limitata δ_u , tale che:

$$e^{t\delta_u(F)} = U(e^{tu})FU(e^{tu})^{-1} \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$$

Poiché G è un gruppo di Lie, si può passare dalle trasformazioni locali di simmetria U_Λ ai corrispondenti generatori infinitesimali J^Λ (Teorema di Stone). Come discusso in [DL83], questi generatori sono l'analogo di densità di corrente localmente integrate, e forniscono un' "algebra locale delle correnti" associata alla coppia di doppi coni $\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{O}}$, ovvero:

(1) esiste un'applicazione lineare $u \in L(G) \mapsto J_u^\Lambda$, con $J_u^\Lambda = J_u^{\Lambda*}$ affiliato a $\mathcal{F}(\mathcal{O})$

(2) $[J_u^\Lambda, J_v^\Lambda] = iJ_{[u,v]}^\Lambda \quad u, v \in L(G)$

(3) $[J_u^\Lambda, F] = \delta_u(F) \quad F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}), u \in L(G)$

(4) $U(g)J_u^\Lambda U(g)^{-1} = J_{g(u)}^\Lambda \quad g \in G, u \in L(G)$

Inoltre esistono un dominio \mathcal{D} denso e invariante di vettori analitici per tutte le J_u^Λ , nonché un *core* (vedi [Pedersen]) invariante $\mathcal{F}(\mathcal{O})_0 \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{O})$ per ogni $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ che lascia \mathcal{D} invariato.

E' importante notare che, poiché la mappa Ψ_Λ è uno *-isomorfismo, la rappresentazione U_Λ è quasi-equivalente a quella globale e dunque lo spettro dei suoi generatori, ovvero l'analogo delle corrispondenti correnti integrate su un volume finito, è lo stesso di quelli globali. Dunque i generatori di un'implementazione locale delle traslazioni, definita come in (\times) , soddisfano infatti la condizione spettrale (positività dell'energia), mentre il tensore energia-impulso integrato su un volume finito non può essere un operatore positivo, per la proprietà di Reeh-Schlieder nel vuoto. Questo apparente paradosso è risolto osservando che è sempre possibile aggiungere alle densità integrate su un volume finito degli operatori appartenenti all'algebra $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$ per far coincidere il loro spettro con

quello dei generatori globali: in altre parole, guardando al problema dal nostro punto di vista, la realizzazione dell'algebra locale delle correnti definita dalle relazioni precedenti non é unica.

Dall'esistenza del dominio \mathcal{D} segue infatti che é possibile integrare la rappresentazione di $L(G)$ a una rappresentazione unitaria fortemente continua \tilde{U} di \tilde{G} tale che:

- (a) $\tilde{U}_\Lambda(g) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}})$ $g \in G_0$
- (b) $\tilde{U}(g)F\tilde{U}(g)^{-1} = U(\sigma(g))FU(\sigma(g))^{-1}$ $g \in \tilde{G}_0, F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$
- (c) $U(\sigma(g))\tilde{U}_\Lambda(g)U(\sigma(g))^{-1} = \tilde{U}_\Lambda(hgh^{-1})$ $g, h \in \tilde{G}_0$

E' chiaro che se \tilde{U}_Λ soddisfa (a),(b),(c), i suoi generatori realizzano a loro volta un'algebra locale delle correnti relativa ai doppi coni \mathcal{O} e $\hat{\mathcal{O}}$.

Ci chiediamo pertanto quando ció effettivamente accada. Ricordando la definizione di mappa localizzante e la relazione (**), osserviamo che U_Λ induce un gruppo di automorfismi sull'algebra $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}})$.

Sia dunque $\tilde{\theta}$ l'azione di \tilde{G}_0 su $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}})$ definita da:

$$\tilde{\theta}_g(F) = U(\sigma(g))_\Lambda F U(\sigma(g))_\Lambda^{-1}$$

per $g \in \tilde{G}_0, F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}})$.

E' immediato verificare che la condizione richiesta é:

$$\tilde{U}_\Lambda(g) = X(g)U_\Lambda(\sigma(g)) \quad g \in \tilde{G}_0$$

con $X(g)$ $\tilde{\theta}$ -cociclo continuo e covariante in $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}})$, ovvero:

- (i) $X(g) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\hat{\mathcal{O}})$ $g \in \tilde{G}_0$
- (ii) $X(g)\tilde{\theta}_g X(h) = X(gh)$ $g, h \in \tilde{G}_0$
- (iii) $U(\sigma(h))X(g)U(\sigma(h))^{-1} = X(hgh^{-1})$ $g, h \in \tilde{G}_0$

In realtà é possibile provare ([Fid86]) che se $U_\Lambda(g)$ e $\tilde{U}_\Lambda(g)$ sono due implementazioni locali canoniche di un gruppo di Lie semplicemente connesso G associate ai doppi coni \mathcal{O} e $\hat{\mathcal{O}}$, per ogni coppia di doppi coni \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 tali che $\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}$ e $\hat{\mathcal{O}} \Subset \mathcal{O}_2$ esiste un unitario $V \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_1)' \cap \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ che realizza l'equivalenza tra $U_\Lambda(g)$ e $\tilde{U}_\Lambda(g)$:

$$\tilde{U}_\Lambda(g) = VU_\Lambda(g)V^{-1}$$

Tale risultato, é importante sottolineare, non contrasta con le osservazioni da noi fatte poco sopra circa l'impossibilitá che il tensore energia-impulso integrato con funzioni test a supporto compatto abbia spettro positivo: l'equivalenza unitaria sussiste tra generatori locali *canonici*.

Confrontiamo i risultati ottenuti finora con l'ipotesi dell'algebra delle correnti nella sua formulazione in termini di campi di Wightman. Il punto di partenza é l'ipotesi che ad ogni $u \in L(G)$ sia associato un campo vettoriale j_u^μ che sia anche una corrente conservata la cui componente $\mu = 0$ é una densitá per il generatore del gruppo di gauge associato a u . Sia assume inoltre che tale corrente soddisfi le relazioni di commutazione a tempo zero:

$$[j_u^0(\vec{x}, 0), j_v^0(\vec{y}, 0)] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y})j_{[u,v]}^0(\vec{x}, 0)$$

A membro destro di tale identitá possono apparire termini aggiuntivi (detti anche **termini di Schwinger**) contenenti derivate della funzione δ di Dirac.

E' noto che purtroppo le correnti valutate in $\mu = 0$ non definiscono in genere distribuzioni a valori operatori, ma soltanto forme bilineari, persino nel caso del campo libero: per una forma bilineare l'espressione delle relazioni di commutazione a tempo zero non ha un senso preciso.

E' possibile tuttavia ottenere operatori essenzialmente autoaggiunti definendo:

$$J_u := \int j_u^0(\vec{x}, t) f_R(\vec{x}) g_\sigma(t) d^3x dt$$

con $g_\sigma(t) \in C_C^\infty([-\sigma, \sigma])$ e $\int g_\sigma(t) dt = 1$, e $f_R := \chi_R * h$, dove χ_R é la funzione caratteristica della sfera di raggio R ed $h \in C_C^\infty$.

Con una scelta opportuna di σ ed h é sempre possibile soddisfare le relazioni (1),(3),(4), ma tale scelta si rivela in generale impossibile per la (2). Infatti anche se fosse verificata (in qualche senso) la relazione di commutazione a tempo zero, la necessaria regolarizzazione nel tempo operata con $g_\sigma(t)$ impedirebbe di ricavare le analoghe commutazione per le J_u , poiché sarebbe necessario valutare le espressioni dei commutatori delle j_u a tempi distinti. Per queste ragioni in [DL83] si giungeva alla conclusione che la possibilità di realizzare esattamente un'algebra locale delle correnti non sia tanto conseguenza dell'ordinaria ipotesi dell'algebra delle correnti, quanto piuttosto si fondi sulla possibilità di perturbare le J_u con opportuni operatori affiliati a $\mathcal{F}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}})$.

3.5 Convergenza dei generatori locali a quelli globali

Resta aperto il problema dello studio della dipendenza funzionale dei generatori J_u^Λ dalla scelta della terna Λ (cioé delle regioni $\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{O}}$), particolarmente importante a causa della natura indiretta della costruzione fin qui delineata.

Il primo passo in questa direzione é stato compiuto in [DADFL87], dove si affronta la questione della convergenza delle J_u^Λ alle J_u quando \mathcal{O} e $\widehat{\mathcal{O}}$ invadono \mathbb{R}^4 in maniera opportuna. Più precisamente, si dimostra che per ogni successione non decrescente di doppi coni $\{\mathcal{O}_n\}$ esiste un'altra successione $\{\widehat{\mathcal{O}}_n\} \supseteq \{\mathcal{O}_n\}$ tale che:

$$\Psi_{\Lambda_n}(A) \mapsto A \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

dove la convergenza é da intendersi in senso forte e Ψ_{Λ_n} é la mappa localizzante associata alla terna $\Lambda_n = (\mathcal{F}(\mathcal{O}_n), \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{O}}_n), \Omega)$.

Poiché la mappa localizzante é uno *-isomorfismo, ogni $B_n = \Psi_{\Lambda_n}(B)$ (con B operatore autoaggiunto in \mathcal{H}) é a sua volta un operatore autoaggiunto con la medesima classe di misura basica di B e $f(B_n) \rightarrow f(B)$ in senso forte per ogni funzione boreliana limitata su \mathbb{R} .

La mappa localizzante si estende inoltre in maniera naturale (passando per i proiettori spettrali) a operatori autoaggiunti non-limitati e quindi:

$$J_u^\Lambda = \Psi_\Lambda(J_u)$$

nel senso forte del risolvente ([RS74]).

Non dimostreremo questo risultato, ma ci limiteremo a dire che si basa sulle proprietà del cono naturale \mathcal{P}^\natural e sulla **proprietá di Cluster generalizzata**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_{\Lambda_n} - \omega\| = 0$$

dove ϕ_{Λ_n} é lo stato prodotto canonico, introdotto all'inizio, associato alla terna Λ_n e la successione $\{\widehat{\mathcal{O}}_n\}$ invade \mathbb{R}^4 .

In generale non esiste controllo sulla velocità di crescita necessaria per gli $\widehat{\mathcal{O}}_n$, ma in [DADFL87] vengono fornite stime in alcuni casi particolari, tra cui quello del campo libero massivo e a massa nulla.

Caso $m > 0$: E' sufficiente che $r_n \rightarrow \infty$ e $R_n - r_n \geq \frac{c}{m} \log r_n m$, con R_n e r_n raggi rispettivamente dei doppi coni $\widehat{\mathcal{O}}_n$ e \mathcal{O}_n , e c costante dipendente dalla dimensione dello spazio-tempo.

Caso $m = 0$: Tale teoria é invariante per dilatazioni, e dunque esistono automorfismi δ_λ , per $\lambda > 0$, di $\mathcal{F} = C^*(\bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{F}(\mathcal{O}))$ tali che $\omega \circ \delta_\lambda = \omega$ e $\delta_\lambda(\mathcal{F}(\mathcal{O})) = \mathcal{F}(\lambda\mathcal{O})$ per ogni doppio cono \mathcal{O} centrato nell'origine. Ne segue che per ogni $\lambda > 0$ si ha $\|\phi_\lambda - \omega\| = \|\phi_\lambda^\lambda - \omega\|$ (indichiamo con ϕ_λ^λ lo stato prodotto canonicamente associato alla terna $\Lambda_\lambda = (\mathcal{F}(\lambda\mathcal{O}_n), \mathcal{F}(\lambda\widehat{\mathcal{O}}_n), \Omega)$) e dunque, ricordando la proprietá di cluster generalizzata, segue che $\|\phi_\lambda - \omega\| \rightarrow 0$ per $\mathcal{O} \nearrow \mathbb{R}^4$ il che avviene se e solo se $\frac{R}{r} \rightarrow \infty$.

3.6 Ricostruzione delle correnti conservate

In questa sezione affrontiamo il problema opposto, cioè il calcolo del limite di scala dei generatori delle simmetrie quando le regioni di localizzazione tendono ad un punto: riportiamo una discussione euristica che ha portato in alcuni casi particolari ([Carp89]) alla soluzione del problema della ricostruzione delle correnti conservate.

Ricordiamo che gli operatori unitari locali che implementano simmetrie (di gauge, spazio-temporali, supersimmetrie) la cui costruzione è stata illustrata finora, sono l'analogo delle cariche di Noether, ovvero di componenti tempo di correnti regolarizzate con funzioni test opportune (in realtà si va anche oltre l'analogia: questi risultati, essendo stati raggiunti senza fare ausilio di una lagrangiana sottostante, sono validi anche nel caso di simmetrie discrete, sotto particolari ipotesi di simmetria delle regioni $\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{O}}$).

E' dunque lecito aspettarsi di ottenere, nel caso limite in cui la regione di localizzazione dei generatori tende a un punto, le "densità" di tali generatori o, nel caso di simmetrie continue, le correnti di Wightman identificate dal Teorema di Noether.

Siano \mathcal{O}_r e $\mathcal{O}_{r+\delta}$ due doppi coni centrati nell'origine dello spazio-tempo di Minkowski d -dimensionale, con base a x_0 e di raggio r e $r + \delta$ rispettivamente:

$$\mathcal{O}_r := \{x \in \mathbb{R}^d : |x_0| + |x_1| + \dots + |x_{d-1}| \leq r\}$$

$$\mathcal{O}_{r+\delta} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x_0| + |x_1| + \dots + |x_{d-1}| \leq r + \delta\}$$

Indichiamo inoltre con $J^{\Lambda_{r,r+\delta}}$ uno dei generatori locali di una simmetria continua canonicamente associati alla terna $\Lambda_{r,r+\delta} = (\mathcal{F}(\mathcal{O}_r), \mathcal{F}(\mathcal{O}_{r+\delta}), \Omega)$

Per quanto appena accennato è ragionevole supporre che $J^{\Lambda_{r,r+\delta}}$ sia proporzionale (anche a meno di un'opportuna "rinormalizzazione") alla "carica" nella sfera di raggio r centrata nell'origine a $t = x_0 = 0$, ovvero:

$$J^{\Lambda_{r,r+\delta}} \sim \int_{|\vec{x}| \leq r} j^0(\vec{x}, 0) d^{d-1}x \quad (\circ)$$

dove $j^0(\vec{x}, 0)$ è la corrente di Noether. L'espressione (\circ) suggerisce che, nel limite di $r + \delta \rightarrow 0$, valga una relazione del tipo:

$$J^{\Lambda_{r,r+\delta}} \sim r^{d-1} j^0(\vec{0}, 0) \quad (\circ\circ)$$

Un'ipotesi che viene fatta al fine di semplificare la trattazione é quella di essere in una teoria di campo **invariante per dilatazioni**. In una teoria siffatta esiste una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo moltiplicativo \mathbb{R}_+ dei numeri reali positivi tale che:

$$D(\lambda)\mathcal{F}(\mathcal{O})D(\lambda)^{-1} = \mathcal{F}(\lambda\mathcal{O})$$

e:

$$D(\lambda)\Omega = \Omega$$

Dalle leggi di covarianza delle implementazioni locali canoniche delle simmetrie è facile verificare che, se:

$$U_{\Lambda_{r,r+\delta}}(\theta) = e^{i\theta J^{\Lambda_{r,r+\delta}}}$$

nel caso di simmetrie interne si ha:

$$D(\lambda)U_{\Lambda_{r,r+\delta}}(\theta)D(\lambda)^{-1} = U_{\Lambda_{\lambda r, \lambda r + \lambda \delta}}(\theta) \quad (\bullet \circ)$$

mentre nel caso di simmetrie spazio-temporali:

$$D(\lambda)U_{\Lambda_{r,r+\delta}}(\theta)D(\lambda)^{-1} = U_{\Lambda_{\lambda r, \lambda r + \lambda \delta}}(\lambda \theta) \quad (\circ \bullet)$$

Da $(\bullet \circ)$, $(\circ \bullet)$ segue subito che nel primo caso:

$$D(\lambda)J^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1} = J^{\Lambda_{\lambda r, \lambda r + \lambda \delta}}$$

mentre nel secondo:

$$D(\lambda)J^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1} = \lambda J^{\Lambda_{\lambda r, \lambda r + \lambda \delta}}$$

La stima $(\circ \circ)$ si riformula dunque come segue:

$$D(\lambda)J^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1} \sim_{\lambda \rightarrow 0} c(r)\lambda^{d-1+\alpha}j^0(\vec{0}, 0) \quad (\circ \circ \circ)$$

con $\alpha = 0$ nel caso di trasformazioni di gauge ed $\alpha = 1$ nel caso di trasformazioni spazio-temporali e $c(r)$ costante opportuna.

Essendo la corrente $j^0(x)$ una distribuzione a valori operatori, l'espressione $(\circ \circ \circ)$ è priva di senso: al fine di ottenere un operatore è necessario regolarizzare la corrente con una funzione test $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Per il limite di scala dei generatori locali la $(\circ \circ \circ)$ suggerisce allora di considerare l'espressione:

$$\frac{1}{\lambda^{d-1+\alpha}} \int f(x)T(x)D(\lambda)J^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x \quad (\bullet \circ \circ)$$

nel limite $\lambda \rightarrow 0$, dove $T(x)$ indica l'implementazione globale delle traslazioni spazio-temporali.

Che la formulazione del limite di scala nella forma $(\bullet \circ \circ)$ sia quella giusta appare chiaro grazie al seguente risultato: supponendo l'esistenza di una corrente di Wightman che generi localmente la simmetria in questione e del relativo dominio invariante \mathcal{D} , è naturale definire dei generatori locali essenzialmente autoaggiunti su \mathcal{D} tramite l'equazione:

$$\bar{J}^{\Lambda_{r,r+\delta}} = j^0(g_{r,r+\delta})$$

con $g_{r,r+\delta}$ funzione test opportunamente scelta con supporto contenuto in $\mathcal{O}_{r+\delta}$. I generatori così definiti non forniscono una rappresentazione dell'algebra di Lie del gruppo di simmetria di partenza (la loro esponenziazione non fornisce quindi una rappresentazione del gruppo relativo) e dunque certamente non coincidono con quelli canonici, ma semplificano la trattazione del limite $(\circ \circ \circ)$.

Il primo passo consiste nell'osservare che:

$$\int f(x)T(x)D(\lambda)\bar{J}^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x = \lambda^{d-1+\alpha}j^0((g_{r,r+\delta})_\lambda * f)$$

dove $(g_{r,r+\delta})_\lambda(x) = \lambda^{-d}g_{r,r+\delta}(\frac{x}{\lambda})$, e $d-1+\alpha$ è la dimensione di $j^0(x)$ (nel caso in cui non siano presenti dimensioni anomale α assume i valori indicati sopra). Dalle proprietà della convoluzione, e dalla definizione di $j^0(x)$ (vedi assiomi di Wightman) si ottiene:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{1}{\lambda^{d-1+\alpha}} \int f(x)T(x)D(\lambda)\bar{J}^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x - c(r, \delta)j^0(f)\psi \right) \right\| = 0$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}$.

Il calcolo del limite $(\bullet \circ \circ)$ presenta difficoltà ben più grandi quando si considerino generatori canonici costruiti per via algebrica poichè in generale la costruzione illustrata nelle sezioni precedenti fornisce prova della loro esistenza ma non è costruttiva.

Resta di grande interesse il problema della coincidenza (in un senso opportuno) dei generatori locali canonici con quelli costruiti a partire dalle correnti di Wightman quando le rispettive regioni di localizzazione tendono ad un punto. La "differenza" tra questi due oggetti è in qualche senso riconducibile a perturbazioni appartenenti all'algebra di von Neumann $\mathcal{F}(\mathcal{O}_r)' \cap \mathcal{F}(\mathcal{O}_{r+\delta})$ (vedi sezione dedicata all'algebra delle correnti): la speranza è che esse diventino trascurabili nel limite.

Sia per esempio $j^0(x)$ la “densità di carica elettrica” nel caso del campo libero carico a massa nulla in dimensione $d = 4$. Supponendo che $\int g_{r,r+\delta}(x)d^d x = 0$, e scegliendo $g'(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tale che $\text{supp } g'(x) \subseteq \mathcal{O}_r \cap \mathcal{O}'_{r+\delta}$, possiamo definire il generatore locale come:

$$\tilde{J}^{\Lambda_{r,r+\delta}} = j^0(g_{r,r+\delta}) + \Phi_1(g')$$

dove $\Phi_1(x)$ indica una delle due copie del campo libero scalare che definiscono il campo carico.

E' noto che la dimensione di $\Phi_1(x)$ è uguale a 1, ovvero:

$$D(\lambda)\Phi_1(x)D(\lambda)^{-1} = \lambda\Phi_1(\lambda x)$$

e dunque:

$$\lambda^{-3} \int f(x)T(x)D(\lambda)\tilde{J}^{\Lambda_{r,r+\delta}}D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x = j^0(g_{r,r+\delta} * f) + \lambda^{-2}\Phi_1(g'_\lambda * f)$$

espressione che diverge per $\lambda \rightarrow 0$.

Un'ulteriore difficoltà consiste nella mancanza di controllo sul dominio dei generatori canonici. Non solo non è noto in generale se il vettore di vuoto Ω vi sia contenuto, ma sembra anche difficoltoso stabilire l'esistenza del limite $(\bullet \circ \circ)$ per un insieme di vettori sufficientemente grande da contenere almeno un *core* per la corrente di Wightman $j^0(f)$. Per questo motivo può essere preferibile affrontare il problema considerando direttamente gli operatori unitari $U_{\Lambda_{r,r+\delta}}(\theta)$. In questo caso la stima $(\circ \circ \circ)$ suggerisce l'espressione:

$$D(\lambda)(U_{\Lambda_{r,r+\delta}} - 1)D(\lambda)^{-1} \sim_{\lambda \rightarrow 0} i\lambda^{d-1+\alpha}j^0(0)$$

ovvero, tenendo conto delle considerazioni svolte finora:

$$\frac{1}{\lambda^{d-1+\alpha}} \int f(x)T(x)D(\lambda)(U_{\Lambda_{r,r+\delta}} - 1)D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} c(r)j^0(g) \quad (\circ \bullet \circ)$$

Si dimostra tuttavia ([Carp89]) che la convergenza del limite $(\circ \bullet \circ)$ per un qualunque operatore V unitario localizzato in una regione finita dello spazio-tempo implica $V = 1$. E' possibile aggirare anche questo ulteriore ostacolo considerando l'operatore $U - (\Omega, U\Omega)$ in luogo di $U - 1$ (ovvero sottraendo il valor medio di U sul vuoto), ricordando le ordinarie prescrizioni di rinormalizzazione per operatori composti ([IZ80]).

L'espressione che presenta le più grandi possibilità di condurre al risultato desiderato è dunque:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^{d-1+\alpha}} \int f(x)T(x)D(\lambda)(U_{\Lambda_{r,r+\delta}} - (\Omega, U_{\Lambda_{r,r+\delta}}\Omega))D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x \quad (\circ \circ \bullet)$$

Naturalmente si può considerare un'opportuna funzione limitata h dell'operatore $J^{\Lambda_{r,r+\delta}}$ e considerare il limite:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^{d-1+\alpha}} \int f(x)T(x)D(\lambda)(h(J^{\Lambda_{r,r+\delta}}) - (\Omega, h(J^{\Lambda_{r,r+\delta}})\Omega))D(\lambda)^{-1}T(x)^{-1}d^d x$$

Proprio a partire da $(\circ \circ \bullet)$, in [Carp98] è stata fornita per la prima volta una risposta affermativa per la ricostruzione del tensore energia-impulso nel caso di una classe di teorie di campo su uno spazio di Minkowski di dimensione $d = 2$ che include il campo libero scalare a massa nulla e modelli generati da correnti chirali associate al gruppo di gauge $SU(n)$. Inoltre, ancora in [Carp98] è mostrato come il limite di scala dell'implementazione canonica di $SU(2)$ nel caso del campo complesso libero a massa nulla è nullo, e tale risultato è interpretato come una manifestazione dell'inesistenza della corrente di Wightman associata.

Lo studio nel caso “realistico” in uno spazio-tempo quadridimensionale è tuttora in corso (si veda ad esempio [Tom99]).

Bibliografia

- [AS03] E.M.Alfsen, F.W.Shultz: *Geometry of state spaces of operator algebras*, Birkhäuser, 2003.
- [Ara99] H.Araki: *Mathematical theory of quantum fields*, Oxford University Press, 1999.
- [Bar47] V.Bargmann: *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. Math. **48**, p.3.
- [BW48] V.Bargmann, E.P.Wigner: *Group theoretical discussion of relativistic wave equation*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA **34**, p.5.
- [BR50] N.Bohr, L.Rosenfeld: *Field and charge measurements in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **78** n.6 (1950), 794-798.
- [Bor61] H.J.Borchers: Nuovo Cimento **19** (1961), 787.
- [BR79] O.Bratteli, D.W.Robinson: *Operator algebras and quantum statistical mechanics, vol.I*, Springer-Verlag, 1979.
- [BGL02] R.Brunetti, D.Guido, R.Longo: *Modular localization and Wigner particles*, Rev. Math. Phys. vol.14 (2002) n.7-8, 759-785.
- [Buc74] D.Buchholz: *Product states for local algebras*, Commun. Math. Phys.**36** (1974), p.287.
- [BDL86] D.Buchholz, S.Doplicher, R.Longo: *On Noether's theorem in quantum field theory*, Annals of Physics **170** (1986), 1-17.
- [BDLR92] D.Buchholz, S.Doplicher, R.Longo, J.E.Roberts: *A new look at goldstone's theorem*, Reviews in Math. Phys. Special Issue (1992) 49-83.
- [BE85] D.Buchholz, H.Epstein: *Spin & statistics of quantum topological charges*, Fizika **17** (1985), 329-343.
- [BF82] D.Buchholz, K.Fredenhagen: *Locality and the structure of particle states*, Commun. Math. Phys.**84** (1982), 1-54.
- [BW86] D.Buchholz, E.H.Wichmann: *Causal independence and the energy level density of states in quantum field theory*, Commun. Math. Phys.**106** (1986), p.321.

- [BDAF87] D.Buchholz, C.D'Antoni, K.Fredenhagen: *The universal structure of local algebras*, Commun. Math. Phys.**111** (1987), p.123.
- [Car94] P.Caressa: *Metodi matematici della meccanica quantistica*, 1994 (scaricabile da www.caressa.it).
- [Car00] P.Caressa: *Riflessioni sul formalismo hamiltoniano*, 2000 (scaricabile da www.caressa.it).
- [Carp89] S.Carpi: *Teorema di Noether quantistico e invarianza conforme: studio di un modello*, tesi di laurea, 1989.
- [Carp98] S.Carpi: *Quantum Noether's theorem and conformal field theory: a study of some models*, Reviews in Math. Phys. vol.11, n.5 (1999) 519-532.
- [DAL83] C.D'Antoni, R.Longo: *Interpolation by type I factors and the flip automorphism*, J. Funct. Anal. **15** (1983), p.361.
- [DADFL87] C.D'Antoni, S.Doplicher, K.Fredenhagen, R.Longo: *Convergence of local charges and continuity properties of W^* inclusions*, Commun. Math. Phys.**110** (1987), p.325.
- [Dir27] P.A.M.Dirac: *Quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. Roy. Soc. **A114** (1927), p.243.
- [Dir58] P.A.M.Dirac: *I principi della meccanica quantistica*, Bollati-Boringhieri, 1958.
- [DHR69a] S.Doplicher, R.Haag, J.E.Roberts: *Fields, observables and gauge transformations I*, Commun. Math. Phys.**13** (1969), 1-23.
- [DHR69b] S.Doplicher, R.Haag, J.E.Roberts: *Fields, observables and gauge transformations II*, Commun. Math. Phys.**15** (1969), 173-200.
- [DHR71] S.Doplicher, R.Haag, J.E.Roberts: *Local observables and particle statistics I*, Commun. Math. Phys.**23** (1971), 199-230.
- [DHR74] S.Doplicher, R.Haag, J.E.Roberts: *Local observables and particle statistics II*, Commun. Math. Phys.**35** (1974), 49-85.
- [DR72] S.Doplicher, J.E.Roberts: *Fields, statistics and non-abelian gauge groups*, Commun. Math. Phys. **28** (1972), 331-348.
- [Dop74] S.Doplicher: *The superselection structure in local quantum theories*, in *Proceedings of the international school of mathematical physics* G.Gallavotti ed., Università di Camerino (1976).
- [Dop75] S.Doplicher: *The statistics of particle in local quantum theories*, Proceedings of the Kyoto International Conference on Mathematical Physics, Kyoto 1975, Springer Lecture Notes in Physics n.39.

- [Dop82] S.Doplicher: *Local aspects of superselection rules*, Commun. Math. Phys. **85** (1982), 73-86.
- [DL83] S.Doplicher, R.Longo: *Local aspects of superselection rules II*, Commun. Math. Phys. **88** (1983), 399-409.
- [DL84] S.Doplicher, R.Longo: *Standard split inclusions of von Neumann algebras*, Invent. Math. **75** (1984), 493-536.
- [Dop89] S.Doplicher: *Local observables and the structure of quantum field theory*, in *The algebraic theory of superselection sectors. Introduction and recent results*. (Palermo, 1989), D.Kastler ed., World Scientific, 1990, 230-247.
- [DR89a] S.Doplicher, J.E.Roberts: *Endomorphisms of C^* -algebras, cross products and duality for compact groups*, Ann. Math. **75** (1989), 75-119.
- [DR89b] S.Doplicher, J.E.Roberts: *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. **98** (1989), 157-218.
- [DR90] S.Doplicher, J.E.Roberts: *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics*, Commun. Math. Phys. **131** (1990), 51-107.
- [DL7475] S.Doplicher: *Appunti del corso di analisi funzionale, a.a. 1974-'75 (a cura di R.Longo)*, Istituto Matematico "Guido Castelnuovo".
- [DFR95] S.Doplicher, K.Fredenhagen, J.E.Roberts: *The quantum structure of space-time at the Planck scale and the quantum fields*, Commun. Math. Phys. **172** (1995), 187-220.
- [Feyn85] R.P.Feynman: *QED*, Adelphi, 1985.
- [Fid86] F.Fidaleo: *On the local implementation of gauge symmetries in local quantum theory*, Commun. Math. Phys. **107** (1986), p.233.
- [Fred95] K.Fredenhagen: *Superselection sectors*, notes from lectures held at Hamburg University in the Winter Term 1994-'95.
- [Fred04] K.Fredenhagen: *Algebraic quantum field theory*, Sommersemester 2004, Institut für theoretische Physik, Universität Hamburg.
- [Gre53] H.S.Green: *A generalized method of field quantization*, Phys. Rev. **90** (1953), p.270.
- [Haag96] R.Haag: *Local quantum physics*, II ed., Springer, 1996.
- [HK64] R.Haag, D.Kastler: *An algebraic approach to quantum field theory*, J. Math. Phys. **5** (1964), 848-861.
- [Hal06] H.Halvorson: *Algebraic quantum field theory*, preprint, 2006.
- [IZ80] C.Itzykson, J.B.Zuber: *Quantum field theory*, McGraw-Hill, 1980.

- [Land92] N.P.Landsman: *Review of "Local quantum physics" by Rudolf Haag*, 1992.
- [MS84] F.Mandle,G.Shaw: *Quantum field theory*, John Wiley & Sons, 1984.
- [Mor02] G.Morsella: *Superselction structure at small scales in algebraic quantum field theory*, tesi di dottorato, a.a.1998-2002.
- [Omn94] R.Omnés: *The interpretation of quantum mechanics*, Princeton University Press, 1994.
- [Pand00] C.Pandiscia: *Sistemi elementari nella teoria dei campi quantistici*, tesi di laurea, a.a.1999-2000.
- [Ped89] G.K.Pedersen: *Analysis now*, Springer-Verlag, 1989.
- [Per00] D.H.Perkins: *Introduction to high energy physics*, 4th edition, Cambridge University Press, 2000.
- [RS74] M.Reed, B.Simon: *Methods of modern mathematical physics, vol.I*, Academic Press, 1974.
- [RS75] M.Reed, B.Simon: *Methods of modern mathematical physics, vol.II*, Academic Press, 1975.
- [Rob90] J.E.Roberts: *Lectures on algebraic quantum field theory*, in *The algebraic theory of superselection sectors. Introduction and recent results.* (Palermo, 1989), D.Kastler ed., World Scientific, 1990, 1-112.
- [Rob04] J.E.Roberts: *More lectures on algebraic quantum field theory*, in *Noncommutative geometry*, S. Doplicher, R. Longo eds, Springer, Berlin, 2004, 263-342.
- [Sal95] D.Salvitti: *La nozione generale di statistica e spazi di Fock per i plektoni*, tesi di laurea, a.a.1994-'95.
- [Sal97] D.Salvitti: *Statistica delle trecce e teorie dei campi in due dimensioni*, tesi di laurea, a.a.1996-'97.
- [Seg47] I.E.Segal: *Postulates for general quantum mechanics*, Annals of Mathematics **48** (1947), 930-948.
- [Sim68] D.J.Simms: *Lie groups and quantum mechanics* (Lecture Notes in Mathematics 52), Springer-Verlag, 1968.
- [SW64] R.F.Streater,A.S.Wightman: *PCT, spin-statistics and all that...*, Benjamin, 1964.
- [Str03] F.Strocchi: *Introduzione ai fondamenti matematici della Meccanica Quantistica*, dispense, 2003.
- [Sum82] S.J.Summers: *Normal product states for fermions and twisted duality*, Commun. Math. Phys. **86** (1982), p.111.

- [Tol99a] M.Toller: *Gruppi ed algebre in meccanica quantistica*, dispense, 1999.
- [Tol99b] M.Toller: *Introduzione alla teoria dei campi*, dispense, 1999.
- [Tom99] L.Tomassini: *Sul teorema di Noether quantistico: studio del campo libero di massa zero a quattro dimensioni*, tesi di laurea, a.a.1998-1999.
- [vN32] J.von Neumann: *Fondamenti matematici della meccanica quantistica*, Il Poligrafo, 1932.
- [WWW52] G.C.Wick,A.Wightman,E.P.Wigner: *The intrinsic parity of elementary particles*, Commun. Math. Phys. **88** (1952), 101-105.
- [Wigh60] A.S.Wightman: *L'invariance dans la mécanique quantique relativiste in Relations de dispersion et particules elementaires*, Les Houches, (Paris, Hermann), 1960.
- [Wigh97] A.S.Wightman: *Wigner on particles and fields*, in *The collected works of E.P.Wigner*, Springer, 1997.
- [Wign59] E.P.Wigner: *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Academic Press, New York, 1959.
- [Wign67] E.P.Wigner: *Symmetries and reflections: scientific essays of Eugene P. Wigner*, Ox Bow Press, 1967.

“L’originalità è l’arte di nascondere le proprie fonti” Albert Einstein